



KOMPOZİT EĞRİSEL KİRİŞLERİN ÇARPILMA ETKİSİ GÖZETİLEN GERİLME DAĞILIMININ KARIŞIK SONLU ELEMANLARLA ANALİZİ

Umit N. Aribas¹, Merve Ermiş², Akif Kutlu², Nihal Eratlı² ve Mehmet H. Omurtag³

¹İstanbul Okan Üniversitesi, İstanbul

²İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

³İstanbul Medipol Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

In this pioneering study, the warping included normal/shear stress analyses of composite curved beams are investigated based on the mixed finite element analysis. The Poisson's ratios and coupling effects of orthotropic composites are taken into account. The warping included torsional rigidity is determined using the displacement-based finite elements and used in the mixed finite element formulation. There are totally twenty-four field variables for each curved mixed finite element. The normal stresses are determined using the curvatures on the related cross-section. The shear stresses are determined using the displacement type finite elements based on warping function and axial rotations of the cross-section. The normal/shear stresses of a composite curved beam are compared with the results of SOLID186 elements of ANSYS 17.1. Then, the influences of cross-sectional geometry and thickness ratios of stiffener on the normal/shear stresses of composite curved beams are investigated.

Keywords: Stress, warping, composite, curved beam, mixed finite element

ÖZET

Bu özgün çalışma kapsamında, kompozit eğrisel kiriş kesitlerinde normal ve kayma gerilmesi dağılımı, kesitte çarpılma etkisi gözetilerek, karışık sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir. Ortotropik kompozitlerin bünye bağıntıları türetilirken, üç boyutlu elastisite kuramından çubuk kuramına indirgeme yapılmış, kuple etkiler ve Poisson oranları gözetilmiştir. Çarpılma etkisi gözetilen burulma rijitliğinin yerdeğiştirme tabanlı sonlu eleman formülasyonu karışık sonlu eleman formülasyonuna entegre edilmiştir. İki düğüm noktalı eğrisel elemanlar, her düğüm noktasında onikişer adet bölge değişkenine sahiptir. Karışık sonlu eleman analizinden elde edilen kesit eğrilikleri normal gerilmelerin hesabında kullanılmıştır. Kayma gerilmeleri ise eksenel dönme açısı ve çarpılma fonksiyonuna dayanan yer değiştirme tabanlı sonlu eleman analizi ile elde edilmiştir. Kompozit dairesel bir kirişin normal ve kayma gerilmeleri ANSYS 17.1 SOLID186 eleman gerilmeleri ile karşılaştırılmıştır. Kompozit eğrisel kirişlerde, kesit geometrisi ve takviye kalınlığının normal ve kayma gerilmelerine etkisi incelenerek literatüre kazandırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Gerilme, çarpılma, kompozit, eğrisel kiriş, karışık sonlu eleman

GİRİŞ

Kompozitler, geleneksel malzemelere kıyasla daha iyi performans ve verime sahip şekilde tasarlanabilmeleri nedeni ile denizcilik, havacılık, uzay teknolojisi, robot teknolojisi ve askeri alanlarda yaygın şekilde kullanılmaktadır. Kompozit malzemelerin belirtilen avantajları

sayesinde yaygınlaşmaya başlanmasıyla birlikte, yapısal davranışları üzerine çalışmalar yoğunluk kazanmıştır.

Kompozit kirişlerde gerilme analizi birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. [1] klasik tabakalı plak teorisinin limitlerini elastisite teorisi sonuçlarıyla karşılaştırarak incelemiştir. [2] simetrik kompozitlerin gerilme analizi için sonlu eleman metodu önermiştir. [3] keyfi kompozitlerin gerilme hesabı için Reissner varyasyonel prensibinden geliştirilen ve [4] kompozitlerde serbest uçtaki gerilme alanlarının çözümü için teoriler önermiştir. [5] sonlu farklar çözüm tekniklerini kullanarak kompozitlerin eksenel şekil değiştirme altında gerilme ve yer değiştirmelerini elde etmiştir. [6] genelleştirilmiş tabakalı plak teorisine dayalı kiriş sonlu eleman formüle ederek, bünye bağıntılarından elde ettiği kayma gerilmelerinden parabolik kayma gerilmesi dağılımını hesaplamıştır. [7] kompozit kirişlerde düzlem dışı çarpılmanın dahil edildiği tabakalar arası kayma gerilmelerini elde ederek yüklemenin, tabakalanmanın ve kesitin kayma gerilmeleri üzerindeki etkisini incelemiştir. [8] şekil değiştirmenin, kayma deformasyonunun ve tabakalanmanın kompozit kirişlerin eğilme davranışı üzerindeki etkisini yüksek mertebeden kayma deformasyon teorisi kullanarak incelemiştir. [9] dik-açılı tabakalı kirişlerde kayma gerilmelerinin doğrudan bünye bağıntıları ile elde edildiği trigonometrik kayma deformasyon teorisi önermiştir. [10] kompozit kirişlerin mekanik davranışı için çok-tabakalı kompozit yapı modeli önererek normal ve kayma gerilmelerini elde etmiştir. [11] kompozit ve sandviç kirişlerin statik, burkulma, serbest ve zorlanmış titreşimlerinde zigzag teorisinin hassasiyetini birinci ve üçüncü dereceden kayma deformasyon teorileri ile karşılaştırarak incelemiştir. Kiriş ortasında ve mesnette normal ve kayma gerilmelerini elde etmiştir. [12] iki bölge değişkenli iki düğüm noktalı çubuk eleman geliştirerek kompozit kirişlerin kesit boyunca normal gerilmelerini elde etmiştir. [13] kompozit kirişlerin statik analizi için iki düğüm noktalı kiriş eleman geliştirerek, farklı kayma deformasyon teorilerinin normal ve kayma gerilmelerini karşılaştırmıştır. [14] tabakalı kompozit yapıların analizi için Carrera bileşik fonksiyonunu kullanarak kesit boyunca normal ve kayma gerilmelerini elde etmiştir. [15] kompozit/sandviç kirişlerde kesit boyunca normal ve kayma gerilmelerinin hesabı için normal ve kayma deformasyon teorisi geliştirmiştir. [16] dik-açılı kompozit kirişlerin statik analizi için yüksek mertebeden kayma deformasyon teorisi önermiş ve kesit boyunca normal ve kayma gerilmelerini elde etmiştir. [17] kompozit kirişlerde açıklığın, tabaka açısının ve malzeme parametrelerinin gerilmeler üzerindeki etkisini trigonometrik serilere bağlı analitik çözüm kullanarak incelemiştir. [18] kompozit ve sandviç kirişlerde tabakalanmanın, tabaka açısının ve açıklığın gerilmeler üzerindeki etkisini dört-bilinmeyenli kayma ve normal deformasyon teorisi kullanarak incelemiştir. [19] yüksek mertebeden kayma deformasyon teorisine dayalı karışık sonlu elemanlar kullanarak kompozit kirişlerin kesit boyunca normal ve kayma gerilmelerini elde etmiştir. [20] izotropik T kirişin Carrera bileşik fonksiyonunu ve sonlu eleman methodunu kullanarak üç-boyutlu gerilme dağılımını incelemiştir.

Literatürde kompozit eğrisel kirişlerin düzlem içi yükler altında normal ve kayma gerilmelerinin elde edilmesine dair çalışmalar da mevcuttur; [21] kompozit/sandviç eğrisel kirişlerin kesit kalınlığınca normal ve kayma gerilmeleri için elastisite tabanlı bir metod geliştirmiştir. [22] ısısal ve mekanik yükler altında dik-açılı tabakalı kompozit ve sandviç eğrisel kirişlerin gerilme ve yer değiştirme analizini yüksek mertebe kayma teorisini kullanarak incelemiştir. [23] tabakalı kompozit eğrisel derin kirişlerin statik analizi için hibrit bir yaklaşım önererek, tabaka açısının, mesnet koşullarının ve açıklığın gerilmeler üzerindeki etkisini incelemiştir. [24] sabit eğriliğe ve kalınlığa sahip tabakalı eğrisel kirişlerin gerilme analizi için yüksek mertebeden kiriş modeli geliştirmiştir. [25] dik-açılı tabakalı kompozit silindirik kirişlerin yer değiştirme ve gerilme hesabı için yarı-analitik bir analiz metodu sunmuştur. Kompozit eğrisel kirişler uygulanan düzlem dışı yükler altında ise burulmaya ve

dolayısıyla çarpılmaya maruz kalırlar. Bu sebeple, eğrisel kompozit kirişlerde daha hassas sonuçlar elde edebilmek için çarpılma etkisinin gözetildiği burulma rijitliklerinin belirlenmesi gerekmektedir. Yazarların bilgisi dahilinde literatürde kesit çarpılmasının gözetildiği, düzlem dışı yükleme durumunda kompozit eğrisel kirişlerin normal ve kayma gerilmelerine dair analiz bulunmamaktadır. Keyfi tabakalı kompozit kirişlerin Saint-Venant burulma problemi, sayısal olarak çarpılma veya Prandtl gerilme fonksiyonları ile ele alınabilir. Kompozit kesitlerin çarpılma etkisi dahil edilmiş burulma rijitliği ilgili detaylı literatür bilgisi [26]'da bulunmaktadır.

Bu çalışmada, düzlem dışı yüklerin etkisi ile burulmaya çalışan kompozit eğrisel kirişin kesitlerinde, çarpılma etkisi de gözetilerek, normal ve kayma gerilmesi dağılımları incelenmiştir. Ortotropik kompozitlerin bünye bağıntıları üç boyutlu ortotropik hacimden çubuk kuramına indirgenmiştir. Kompozit kirişte, çarpılma etkisi gözetilen burulma rijitliği kesit düzleminde yer değiştirme tabanlı sonlu eleman formülasyonu ile elde edilerek, karışık sonlu elemanlar formülasyonuna entegre edilmiştir. Kompozit kesitteki normal gerilme dağılımı kesitin eğrilikleri kullanılarak hesaplanmıştır. Kompozit kesitteki kayma gerilmesi ise karışık sonlu eleman analizinden elde edilen eksenel dönme ve çarpılma fonksiyonu kullanılarak, kesit düzlemine döşenen yer değiştirme tabanlı sonlu eleman analizi ile hesaplanmıştır. Kompozit eğrisel kirişlerin normal ve kayma gerilmelerinin hesabı için sonlu eleman yakınsama analizi yapılarak, normal ve kayma gerilmeleri ANSYS 17.1'de SOLID186 elemanlar kullanılarak elde edilen gerilmelerle karşılaştırılmıştır. Kompozit eğrisel kirişlerde takviye kalınlığının, kesit genişliği ve yüksekliğinin gerilmeler üzerindeki etkisi incelenerek literatüre kazandırılmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Ortotrop malzemede, $\mathbf{E}$ elastisite matrisini, $\boldsymbol{\sigma}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ gerilme ve şekil değiştirme vektörlerini ifade etmek üzere gerilme şekil değiştirme bağıntısı $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$ ile tanımlanır. Tabakaların malzeme doğrultuları global eksenlerden farklı doğrultularda tasarlanarak arzu edilen performans ekonomik olarak elde edilebilir. Ortotropik malzemenin dönüştürülmüş bünye bağıntısı $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{E}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ kullanılarak [27], açısız tabakalanma durumu gözönüne alınmıştır. Burada, üzeri çizgili terimler dönüştürülmüş matris ve vektörleri belirtmektedir. Klasik çubuk teorisi kabulleri [28] üzerinden ortotropik tabakaların gerilme şekil değiştirme bağıntısı $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_L = \bar{\boldsymbol{\beta}}_L \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_L$ elde edilir. Burada t, n, b , Frenet koordinantlarını belirtmek üzere $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_L = \{\sigma_t \quad \tau_{bt} \quad \tau_{tn}\}_L^T$ ve $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_L = \{\varepsilon_t \quad \gamma_{bt} \quad \gamma_{tn}\}_L^T$ sırasıyla indirgenmiş gerilme ve şekil değiştirme vektörlerini, $\bar{\boldsymbol{\beta}}_L$ indirgenmiş elastisite matrisini ve L tabaka sayısını ifade etmektedir. Çubuk kesitindeki keyfi bir noktada yer değiştirmelere ait kinematik bağıntılar, kiriş eksenindeki yer değiştirmeler u_t, u_n, u_b ile dönmeler $\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b$ üzerinden $u_t^* = u_t + b\Omega_n - n\Omega_b$, $u_n^* = u_n - b\Omega_t$ ve $u_b^* = u_b + n\Omega_t$ dir. Kinematik bağıntılar indirgenmiş bünye bağıntılarına aktarılırsa,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \tau_{bt} \\ \tau_{tn} \end{Bmatrix}_L = \bar{\boldsymbol{\beta}}_L \left\{ \begin{Bmatrix} u_{t,t} \\ u_{t,b} + u_{b,t} \\ u_{t,n} + u_{n,t} \end{Bmatrix} + b \begin{Bmatrix} \Omega_{n,t} \\ 0 \\ -\Omega_{t,t} \end{Bmatrix} + n \begin{Bmatrix} -\Omega_{b,t} \\ \Omega_{t,t} \\ 0 \end{Bmatrix} \right\}_L, \quad L = 1, \dots, N \quad (1)$$

Burada, alt indisteki virgül belirtilen eksene göre kısmi türevi ifade etmektedir. Kompozit kesitteki kuvvetler T_t, T_n, T_b ve momentler M_t, M_n, M_b , kesitte gerilmelerin analitik integrasyonu ile elde edilir [26]. Kuvvetleri ve momentleri içeren bünye bağıntısı matris formda yazılırsa,

$$\begin{Bmatrix} u_{t,t} \\ u_{t,n} + u_{n,t} \\ u_{t,b} + u_{b,t} \\ \Omega_{t,t} \\ \Omega_{n,t} \\ \Omega_{b,t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{C}_{mf} \\ \mathbf{C}_{fm} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_t \\ T_n \\ T_b \\ M_t \\ M_n \\ M_b \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Burada, $\mathbf{C}$ kompians matrisi olup, $\mathbf{C}_{mf}$, $\mathbf{C}_{fm}$ normal kuvvetler ve momentler arasındaki kuple etkileri gözetten kompians matrisleridir. [29]'dan adapte edilmiş, çarpılma etkisini gözetten burulma rijitliği hesabı, karışık sonlu eleman formülasyonuna entegre edilmiştir. İzotropik uzaysal Timoshenko kirişlerin denge denklemleri ve kinematik bağıntıları [30–32] ortotropik kompozit kirişler için genişletilirse,

$$\begin{aligned} -\mathbf{T}_{,s} - \mathbf{q} &= 0 & -\mathbf{C}_{fm}\mathbf{T} - \mathbf{C}_f\mathbf{M} + \mathbf{\Omega}_{,s} &= 0 \\ -\mathbf{M}_{,s} - \mathbf{t} \times \mathbf{T} - \mathbf{m} &= 0 & -\mathbf{C}_m\mathbf{T} - \mathbf{C}_{mf}\mathbf{M} + \mathbf{u}_{,s} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Burada, $\mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{M}$ sırasıyla yer değiştirme, kesitin dönme, kuvvet ve moment vektörleridir. Yayılı dış kuvvet $\mathbf{q}$ ve moment $\mathbf{m}$ ile ifade edilmektedir. Alan denklemleri (3) ve Gâteaux türevi [33] kullanılarak fonksiyonel elde edilirse,

$$\begin{aligned} I(y) &= -[\mathbf{T}_{,s}, \mathbf{u}] - [\mathbf{M}_{,s}, \mathbf{\Omega}] + [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ [(\mathbf{C}_m)\mathbf{T}, \mathbf{T}] + [(\mathbf{C}_{mf})\mathbf{M}, \mathbf{T}] + [(\mathbf{C}_{fm})\mathbf{M}, \mathbf{T}] + [(\mathbf{C}_f)\mathbf{M}, \mathbf{M}] \} \\ &\quad + [\mathbf{T}, \hat{\mathbf{u}}]_\varepsilon + [\mathbf{M}, \hat{\mathbf{\Omega}}]_\varepsilon + [(\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}), \mathbf{u}]_\sigma + [(\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}), \mathbf{\Omega}]_\sigma \\ &\quad - [\mathbf{q}, \mathbf{u}] - [\mathbf{m}, \mathbf{\Omega}] \end{aligned} \quad (4)$$

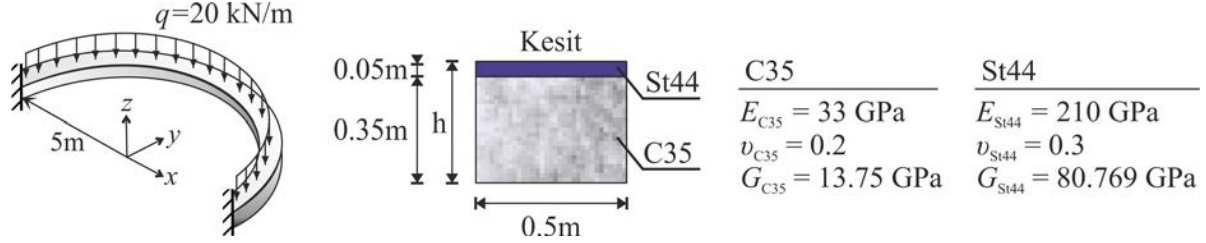
Lineer şekil fonksiyonları [30] kullanılarak iki düğüm noktalı eğrisel elemanın bölge değişkenleri tanımlanmıştır. Her düğüm noktası üç yerdeğiştirme, üç dönme, bir eksenel kuvvet, iki kesme kuvveti, iki eğilme momenti ve bir burulma momenti olmak üzere oniki adet değişkene sahiptir. Karışık sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlar kullanılarak eğrilikler (2) ve kesit yüzünde normal gerilme dağılımı (1) elde edilmiştir. Çarpılma etkisi dahil edilmiş kayma gerilmeleri de, kesit düzlemine döşenmiş, [29]'daki yer değiştirme tabanlı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilmiştir. Kayma gerilmesi vektörü $\boldsymbol{\tau}$, eksenel dönme açısı α , çarpılma fonksiyonu ψ , kesit yüzeyindeki sonlu elemanların kayma modülleri matrisi $\mathbf{G}$ ve kesit düzlemindeki bir noktanın konum vektörü $\mathbf{d} = \{b \quad -n\}^T$ olmak üzere, kayma gerilmesi $\boldsymbol{\tau} = \alpha \mathbf{G}(\nabla \psi - \mathbf{d})$ denklemi ile hesaplanmaktadır.

SAYISAL SONUÇLAR

Kompozit eğrisel kirişlerde düzlem dışı kuvvetler nedeniyle oluşan burulma momenti ve kesit çarpılması, gerilmelerin daha hassas hesabı için çarpılmanın gözetilmesini gerekli kılmaktadır. Bu çalışmada, çarpılma etkisi gözetilmiş burulma rijitliği entegre edilen karışık sonlu eleman analizinden elde edilen eğrilikler, normal gerilme hesabında kullanılmıştır. Kayma gerilmesi ise yer değiştirme tabanlı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilmiştir. Kayma gerilmesi, tabakalar arası sürekliliği ve kesitin alt ve üst sınırlarında sıfır olma koşulunu sağlamaktadır. Kompozit eğrisel kirişlerin normal ve kayma gerilmeleri ANSYS 17.1 SOLID186 elemanların gerilmeleri ile karşılaştırılmıştır. Kompozit eğrisel kirişlerde kesit boyutlarının ve tabaka kalınlığının gerilmeler üzerindeki etkisi incelenmiştir.

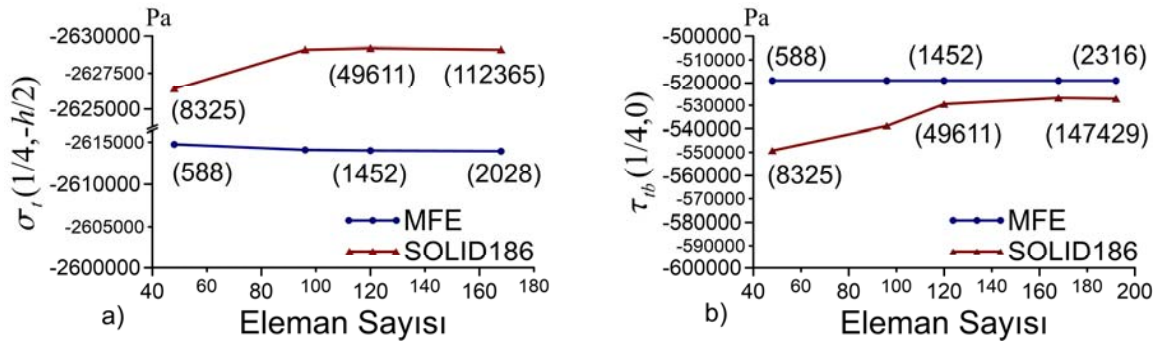
Yakınsama Analizi, Kompozit Dairesel Kiriş, ANSYS

Bu sayısal çalışmanın amacı, çelik takviyeli beton kirişin (Şekil 1) çarpılma etkisi gözetilerek karışık sonlu elemanlarla hesaplanan normal ve kayma gerilmelerinin ANSYS 17.1 SOLID186 elemanları kullanılarak elde edilen gerilmelere yakınsama davranışının gözlemlenmesidir.



Şekil 1. Yakınsama analizi, çelik takviyeli betonarme yarım daire kiriş.

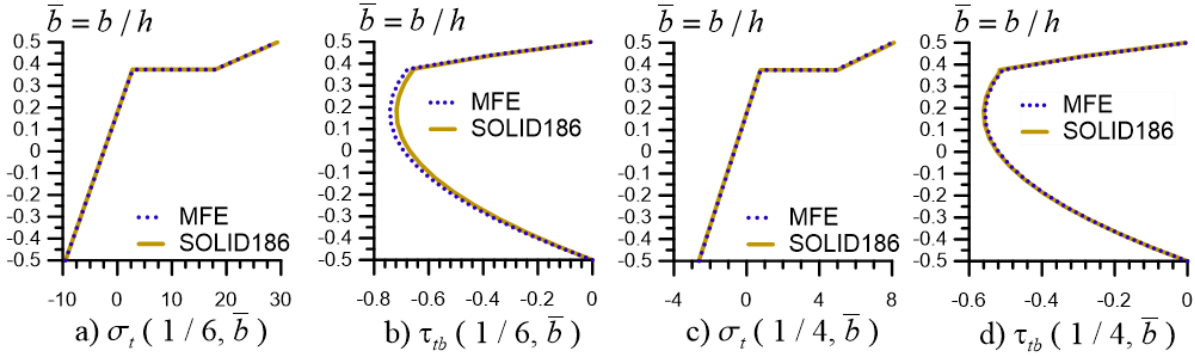
Dairesel kirişin eksenel uzunluğu S ve kiriş aksının normalize edilmiş koordinatı $\bar{t} = t/S$ ile ifade edilmek üzere 48, 96, 120, 168 ve 192 elemanın kullanıldığı karışık sonlu eleman sonuçları $\sigma_t(1/4, -h/2)$ ve $\tau_{tb}(1/4, 0)$, ANSYS SOLID186 değerleriyle karşılaştırılmıştır (Şekil 2). Karışık sonlu eleman analizi ile 120 eleman kullanılarak elde edilen $\sigma_t(1/4, -h/2)$ ve $\tau_{tb}(1/4, 0)$ değerlerin, 96 eleman kullanılarak elde edilen gerilmelere göre yüzdesel farkı sırasıyla $\% -3.04 \times 10^{-3}$ ve $\%4.68 \times 10^{-9}$ olmaktadır. 120 eleman kullanılarak karışık sonlu eleman analizi ile elde edilen $\sigma_t(1/4, -h/2)$ ve $\tau_{tb}(1/4, 0)$ değerlerinin, ANSYS SOLID186 gerilmelerine göre yüzdesel farkı sırasıyla $\% -0.58$ (Şekil 2a) ve $\% -1.99$ (Şekil 2b) olmaktadır. Karışık sonlu elemanlar analizi ile elde edilen σ_t ve τ_{tb} değerleri, SOLID186 sonuçları ile oldukça uyumludur. Sonuçlar 120 sonlu eleman için verilmiştir.



Şekil 2. Yakınsama analizi, $\sigma_t(1/4, -h/2)$ ve $\tau_{tb}(1/4, 0)$ ANSYS SOLID186 elemanları ile elde edilen gerilmelerle karşılaştırılması (h : Kesit yüksekliği). Parantezli değerler nodal değişken sayısını ifade etmektedir.

Şekil 3a'da $\bar{t} = 1/6$ kesitinde kesit dağılımı verilen çarpılma etkisi gözetilen en büyük normal gerilme $\sigma_t(1/6, \bar{b})$ ANSYS SOLID186 elemanlarla elde edilen gerilmeye yüzdesel farkı $\% -0.78$ 'dir ($\bar{b} = b/h$: Normalize kesit yüksekliği). Şekil 3b'de $\bar{t} = 1/6$ kesitinde kesit dağılımı verilen çarpılma etkisi gözetilen en büyük kayma gerilmesinin $\tau_{tb}(1/6, \bar{b})$ ANSYS SOLID186 elemanlarla elde edilen gerilmeye en büyük farkı $\%3.34$ 'tür. Şekil 3c'de $\bar{t} = 1/4$ kesitinde kesit dağılımı verilen çarpılma etkisi gözetilen en büyük normal gerilme $\sigma_t(1/4, \bar{b})$ ANSYS SOLID186 elemanlarla elde edilen gerilmeye yüzdesel farkı $\% -1.40$ 'tır. Şekil

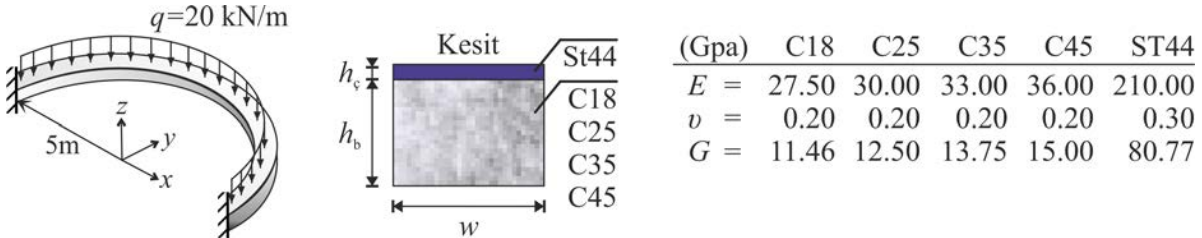
3d'de $\bar{t} = 1/4$ kesitinde kesit dağılımı verilen çarpılma etkisi gözetilen en büyük kayma gerilmesinin $\tau_{tb}(1/4, \bar{b})$ ANSYS SOLID186 elemanlarla elde edilen gerilmeye en büyük farkı % -0.67'dir.



Şekil 3. Kesit yüksekliğince $\sigma_t(\bar{t}, \bar{b})$ ve $\tau_{tb}(\bar{t}, \bar{b})$ dağılımı (MPa).

Parametrik Analiz, Kompozit Dairesel Kiriş, Normal ve Kayma Gerilmeleri

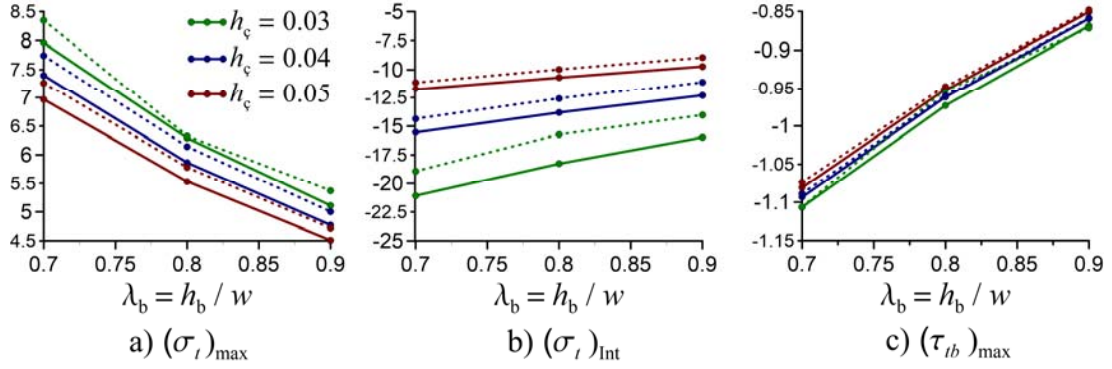
Bu sayısal çalışmanın amacı, kompozit dairel kirişlerde (Şekil 4) kesit geometrisinin, açıklık ortasında $\bar{t} = t/S = 0.5$ çarpılma etkisi gözetilen en büyük çekme gerilmesine $(\sigma_t)_{\max}$ ve tabakalar arası normal gerilme farkına $(\sigma_t)_{\text{Int}} = (\sigma_t^{\text{St44}})_{\text{Int}} - (\sigma_t^k)_{\text{Int}}$ ($k = \text{C18, C25, C35, C45}$), ve $\bar{t} = 0.016$ kesitinde çarpılma etkisi gözetilen en büyük kayma gerilmesine $(\tau_{tb})_{\max}$ etkisi incelenmiştir. Yarım daire kompozit kirişin $w = 0.3\text{m}$, 0.5m ve 0.7m kesit genişliklerinin her biri için beton tabakanın kalınlığı $h_b = 0.35\text{m}$, 0.40m ve 0.45m seçilerek, her bir beton tabakasında takviye kalınlığı $h_\zeta = 0.02\text{m}$, 0.03m , 0.04m ve 0.05m alınarak parametrik analiz yapılmıştır.



Şekil 4. Kompozit dairel kirişlerde normal ve kayma gerilmelerinin parametrik hesabı.

Kesit geometrisinin gerilmelere etkisi: Parametrik analiz kapsamında belirtilen kesitlerde, kesit yüksekliğinin artmasının $\bar{t} = t/S = 0.5$ 'te $(\sigma_t)_{\max}$ ve $(\sigma_t)_{\text{Int}}$, ve $\bar{t} = 0.016$ 'da $(\tau_{tb})_{\max}$ üzerindeki etkisi incelenmiştir. C18, C25, C35 ve C45 beton sınıfları için sırasıyla $\eta_E = E^i/E^{\text{ST44}} = 0.1310$, 0.1429 , 0.1571 ve 0.1714 ve $\eta_G = G^i/G^{\text{ST44}} = 0.1419$, 0.1548 , 0.1702 ve 0.1857 'dir ($i = \text{C18, C25, C35, C45}$). $w = 0.5\text{m}$, $h_\zeta = 0.03\text{m}$, 0.04m ve 0.05m , $\eta_E = 0.1310$ ve 0.1714 için $(\sigma_t)_{\max}$, $(\sigma_t)_{\text{Int}}$ ve $(\tau_{tb})_{\max}$ Şekil 5'te verilmiştir. Her bir takviye kalınlığı için gerilmeler $\lambda_b = h_b/w = 0.7$ kesitinin gerilmelerine normalize edilerek Çizelge 1'de verilmiştir. λ_b arttıkça $(\sigma_t)_{\max}$ ve $(\sigma_t)_{\text{Int}}$ mutlak değerce azalmaktadır (Şekil 5a-b). $(\tau_{tb})_{\max}$ kesit yüksekliği oranından λ_b malzeme sabitleri oranına η_G göre daha fazla etkilenmektedir ve λ_b arttıkça mutlak değerce azalmaktadır (Şekil 5c). Takviye kalınlığı h_ζ

azaldıkça λ_b 'nin artması $(\sigma_t)_{\max}$, $(\sigma_t)_{\text{Int}}$ ve $(\tau_{tb})_{\max}$ 'ni daha fazla azaltmaktadır (Çizelge 1). λ_b oranının artışı için, η_E ve η_G oranlarının azalması $(\sigma_t)_{\max}$ ve $(\tau_{tb})_{\max}$ azalmasını daha fazla etkilerken, η_E oranının artması $(\sigma_t)_{\text{Int}}$ azalmasını daha fazla etkilemektedir. λ_b oranının artmasından en fazla $(\sigma_t)_{\max}$ etkilenmektedir.



Şekil 5. Kesit geometrisinin $\lambda_b = h_b / w$ gerilmelere etkisi ($w = 0.5\text{m}$). Düz ve kesikli çizgiler sırasıyla $\eta_E = 0.1310$ ve 0.1714 'ü ifade etmektedir. (Gerilmeler MPa'dır)

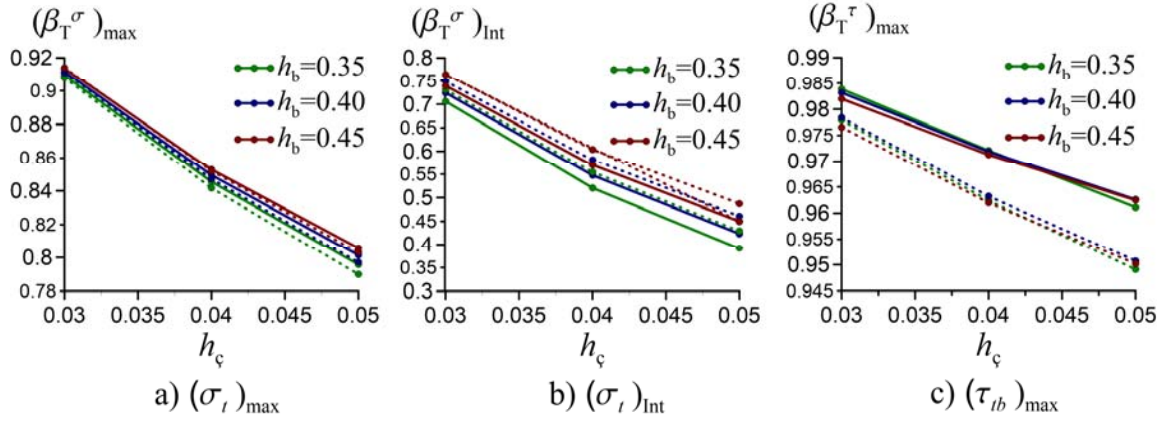
Çizelge 1. Kesit geometrisi $\lambda_b = h_b / w$ 'nin gerilmelere etkisi ($w = 0.5\text{m}$, $i = 0.8$ ve 0.9).

		$(\beta_K^\sigma)_{\max} = \frac{(\sigma_t^{\lambda_b=i})_{\max}}{(\sigma_t^{\lambda_b=0.7})_{\max}}$		$(\beta_K^\sigma)_{\text{Int}} = \frac{(\sigma_t^{\lambda_b=i})_{\text{Int}}}{(\sigma_t^{\lambda_b=0.7})_{\text{Int}}}$		$(\beta_K^\tau)_{\max} = \frac{(\tau_{tb}^{\lambda_b=i})_{\max}}{(\tau_{tb}^{\lambda_b=0.7})_{\max}}$	
h_c	λ_b	$\eta_E = 0.1310$	0.1714	0.1310	0.1714	$\eta_G = 0.1419$	0.1857
0.03m	0.8	0.7906	0.7577	0.8664	0.8312	0.8795	0.8611
	0.9	0.6422	0.6431	0.7576	0.7412	0.7852	0.7880
0.04m	0.8	0.7923	0.7935	0.8883	0.8760	0.8797	0.8816
	0.9	0.6447	0.6464	0.7918	0.7720	0.7859	0.7887
0.05m	0.8	0.7942	0.7957	0.9132	0.8969	0.8807	0.8825
	0.9	0.6474	0.6494	0.8305	0.8047	0.7871	0.7901

Takviye kalınlığının gerilmelere etkisi: Parametrik analiz kapsamındaki her bir kesit için takviye kalınlığının $\bar{t} = t/S = 0.5$ 'te $(\sigma_t)_{\max}$ ve $(\sigma_t)_{\text{Int}}$, ve $\bar{t} = 0.016$ 'da $(\tau_{tb})_{\max}$ üzerindeki etkisi incelenmiştir. $w = 0.3\text{m}$ ve $h_c = 0.02\text{m}$ için $(\sigma_t)_{\max}$, $(\sigma_t)_{\text{Int}}$ ve $(\tau_{tb})_{\max}$ Çizelge 2'de verilmiştir. Her kesitte elde edilen gerilmeler $h_c = 0.02\text{m}$ takviye kalınlığına sahip kesitin gerilmelerine normalize edilmiştir. h_c arttıkça $(\beta_T^\sigma)_{\max} = (\sigma_t^{h_c=i})_{\max} / (\sigma_t^{h_c=0.02})_{\max}$, $(\beta_T^\sigma)_{\text{Int}} = (\sigma_t^{h_c=i})_{\text{Int}} / (\sigma_t^{h_c=0.02})_{\text{Int}}$ ve $(\beta_T^\tau)_{\max} = (\tau_{tb}^{h_c=i})_{\max} / (\tau_{tb}^{h_c=0.02})_{\max}$ ($i = 0.03, 0.04$ ve 0.05) azalmaktadır (Şekil 6). η_E ve h_c arttıkça $(\beta_T^\sigma)_{\max}$ daha fazla azalma eğilimindedir (Şekil 6a). η_E arttıkça $(\beta_T^\sigma)_{\text{Int}}$ artmaktadır (Şekil 6b). h_b azaldıkça $(\beta_T^\sigma)_{\max}$ ve $(\beta_T^\sigma)_{\text{Int}}$ azalmaktadır. η_E arttıkça $(\beta_T^\tau)_{\max}$ azalmaktadır (Şekil 6c). Takviye kalınlığının h_c artmasından en fazla $(\sigma_t)_{\text{Int}}$ en az $(\tau_{tb})_{\max}$ etkilenmektedir.

Çizelge 2. Kompozit dairesel kirişte $\bar{t} = t/S = 0.5$ 'te $(\sigma_t)_{\max}$, $(\sigma_t)_{\text{Int}}$ ve $\bar{t} = 0.016$ 'da $(\tau_{tb})_{\max}$. ($w = 0.3\text{m}$, $h_\varphi = 0.02\text{m}$ ve değerler MPa olarak verilmiştir).

$\lambda_h = h_\varphi / h_b$	η_E	$(\sigma_t)_{\max}$	$(\sigma_t)_{\text{Int}}$	η_G	$(\tau_{tb})_{\max}$
0.057	0.1310	14.586	-49.737	0.1419	-1.874
	0.1429	14.821	-47.668	0.1548	-1.877
	0.1571	15.085	-45.323	0.1702	-1.880
	0.1714	15.330	-43.118	0.1857	-1.885
0.050	0.1310	11.503	-42.002	0.1419	-1.650
	0.1429	11.688	-40.116	0.1548	-1.652
	0.1571	11.895	-37.998	0.1702	-1.655
	0.1714	12.086	-36.024	0.1857	-1.661
0.044	0.1310	9.322	-35.970	0.1419	-1.475
	0.1429	9.471	-34.253	0.1548	-1.478
	0.1571	9.637	-32.338	0.1702	-1.483
	0.1714	9.789	-30.566	0.1857	-1.488



Şekil 6. Takviye kalınlığının gerilmelere etkisi ($w = 0.3\text{m}$). Düz ve kesikli çizgiler sırasıyla $\eta_E = 0.1310$ ve 0.1714 'ü ifade etmektedir.

SONUÇLAR

Kompozit eğrisel kirişlerde, kesit geometrisindeki çarpılma gözetilerek, normal ve kayma gerilmesi dağılımı karışık sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir. Normal gerilme hesabında ilgili kesitin eğrilikleri kullanılmıştır. Kayma gerilmesi hesabı için ise kesit düzlemine döşenmiş aksenal dönmeler ve çarpılma fonksiyonlarından yararlanan yer değiştirme tabanlı sonlu eleman analizi kullanılmıştır. En büyük kayma gerilmesi $(\tau_{tb})_{\max}$ beton kalınlığı oranından $\lambda_b = h_b / w$ malzeme sabitleri oranına göre daha fazla etkilenmektedir. λ_b arttıkça, η_E ve η_G azalırken $(\sigma_t)_{\max}$ ve $(\tau_{tb})_{\max}$ daha fazla etkileniyorken η_E arttıkça $(\sigma_t)_{\text{Int}}$ daha fazla etkilenmektedir. λ_b oranı en fazla $(\sigma_t)_{\max}$ 'yi etkilemektedir. η_E arttıkça $(\beta_T^\sigma)_{\max} = (\sigma_t^{h_\varphi=i})_{\max} / (\sigma_t^{h_\varphi=0.02})_{\max}$ azalma eğilimindeyken $(\beta_T^\sigma)_{\text{Int}} = (\sigma_t^{h_\varphi=i})_{\text{Int}} / (\sigma_t^{h_\varphi=0.02})_{\text{Int}}$ artmaktadır ($i = 0.03, 0.04, 0.05$). η_E artıyorken $(\beta_T^\tau)_{\max} = (\tau_{tb}^{h_\varphi=i})_{\max} / (\tau_{tb}^{h_\varphi=0.02})_{\max}$ azalmaktadır. Takviye kalınlığından h_φ en fazla $(\sigma_t)_{\text{Int}}$ etkilenmektedir.

Teşekkür- Yazarlar bu araştırmaya destek olan İstanbul Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri birimine teşekkür ederler. Proje no: MGA-2017-4739.

KAYNAKLAR

- [1] N.J. Pagano, Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending, *Journal of Composite Materials*. 3 (1969) 398–411. doi:10/bzn3dc.
- [2] A.S.D. Wang, F.W. Crossman, Some New Results on Edge Effect in Symmetric Composite Laminates, *Journal of Composite Materials*. 11 (1977) 92–106. doi:10/d9hxx5.
- [3] N.J. Pagano, Stress fields in composite laminates, *International Journal of Solids and Structures*. 14 (1978) 385–400. doi:10/crmcm7.
- [4] N.J. Pagano, Free edge stress fields in composite laminates, *International Journal of Solids and Structures*. 14 (1978) 401–406. doi:10/ftmfvp.
- [5] R.B. Pipes, N.J. Pagano, Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension, in: J.N. Reddy (Ed.), *Mechanics of Composite Materials: Selected Works of Nicholas J. Pagano*, Springer Netherlands, Dordrecht, 1994: pp. 234–245. doi:10.1007/978-94-017-2233-9_19.
- [6] J.F. Davalos, Y. Kim, E.J. Barbero, Analysis of laminated beams with a layer-wise constant shear theory, *Composite Structures*. 28 (1994) 241–253. doi:10/d3qqfh.
- [7] O. Rand, Interlaminar shear stresses in solid composite beams using a complete out-of-plane shear deformation model, *Computers & Structures*. 66 (1998) 713–723. doi:10/bmnvjm.
- [8] A.M. Zenkour, Transverse Shear and Normal Deformation Theory for Bending Analysis of Laminated and Sandwich Elastic Beams, *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 6 (1999) 267–283. doi:10/fsvqp8.
- [9] R.P. Shimpi, Y.M. Ghugal, A new layerwise trigonometric shear deformation theory for two-layered cross-ply beams, *Composites Science and Technology*. 61 (2001) 1271–1283. doi:10/fnf2pg.
- [10] M. Karama, K.S. Afaq, S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *International Journal of Solids and Structures*. 40 (2003) 1525–1546. doi:10/bnf4km.
- [11] S. Kapuria, P.C. Dumir, N.K. Jain, Assessment of zigzag theory for static loading, buckling, free and forced response of composite and sandwich beams, *Composite Structures*. 64 (2004) 317–327. doi:10/cnvcbt.
- [12] X. Lin, Y.X. Zhang, A novel one-dimensional two-node shear-flexible layered composite beam element, *Finite Elements in Analysis and Design*. 47 (2011) 676–682. doi:10/cc8t6s.
- [13] T.P. Vo, H.-T. Thai, Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories, *Composite Structures*. 94 (2012) 2513–2522. doi:10/f32hbn.
- [14] E. Carrera, A. Pagani, Multi-line enhanced beam model for the analysis of laminated composite structures, *Composites Part B: Engineering*. 57 (2014) 112–119. doi:10/f5mwr6.
- [15] E.G. Pawar, S. Banerjee, Y.M. Desai, Stress Analysis of Laminated Composite and Sandwich Beams using a Novel Shear and Normal Deformation Theory, *Latin American Journal of Solids and Structures*. 12 (2015) 1340–1361. doi:10/gd8669.
- [16] J.L. Mantari, F.G. Canales, A unified quasi-3D HSDT for the bending analysis of laminated beams, *Aerospace Science and Technology*. 54 (2016) 267–275. doi:10/f8sf7b.
- [17] T.-K. Nguyen, N.-D. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams, *Composite Structures*. 160 (2017) 142–151. doi:10/f9hqdc.

- [18] T.P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, D. Lanc, A. Karamanli, Flexural analysis of laminated composite and sandwich beams using a four-unknown shear and normal deformation theory, *Composite Structures*. 176 (2017) 388–397. doi:10/gd867d.
- [19] A. Özütok, E. Madenci, Static analysis of laminated composite beams based on higher-order shear deformation theory by using mixed-type finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*. 130 (2017) 234–243. doi:10/gb2vmg.
- [20] S. Minera, M. Patni, E. Carrera, M. Petrolo, P.M. Weaver, A. Pirrera, Three-dimensional stress analysis for beam-like structures using Serendipity Lagrange shape functions, *International Journal of Solids and Structures*. 141–142 (2018) 279–296. doi:10/gds694.
- [21] R.A. Shenoi, W. Wang, Through-thickness stresses in curved composite laminates and sandwich beams, *Composites Science and Technology*. 61 (2001) 1501–1512. doi:10/fk897p.
- [22] H. Matsunaga, Interlaminar stress analysis of laminated composite and sandwich circular arches subjected to thermal/mechanical loading, *Composite Structures*. 60 (2003) 345–358. doi:10/dw5mbn.
- [23] P. Malekzadeh, A two-dimensional layerwise-differential quadrature static analysis of thick laminated composite circular arches, *Applied Mathematical Modelling*. 33 (2009) 1850–1861. doi:10/cdnshx.
- [24] C. Thurnherr, R.M.J. Groh, P. Ermanni, P.M. Weaver, Higher-order beam model for stress predictions in curved beams made from anisotropic materials, *International Journal of Solids and Structures*. 97–98 (2016) 16–28. doi:10/f844kb.
- [25] J.E. Schnabel, M. Yousfi, C. Mittelstedt, Free-edge stress fields in cylindrically curved symmetric and unsymmetric cross-ply laminates under bending load, *Composite Structures*. 180 (2017) 862–875. doi:10/gbzpdn.
- [26] U.N. Aribas, M. Ermis, N. Eratli, M.H. Omurtag, The static and dynamic analyses of warping included composite exact conical helix by mixed FEM, *Composites Part B: Engineering*. 160 (2019) 285–297. doi:10/gft72h.
- [27] R.M. Jones, *Mechanics Of Composite Materials*, CRC Press, 2014.
- [28] V. Yıldırım, Governing equations of initially twisted elastic space rods made of laminated composite materials, *International Journal of Engineering Science*. 37 (1999) 1007–1035. doi:10/d384x5.
- [29] C.S. Jog, I.S. Mokashi, A finite element method for the Saint-Venant torsion and bending problems for prismatic beams, *Computers and Structures*. 135 (2014) 62–72. doi:10/gc6xzc.
- [30] M.H. Omurtag, A.Y. Aköz, The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading, *Computers & Structures*. 43 (1992) 325–331. doi:10/b644p8.
- [31] N. Eratli, M. Yilmaz, K. Darilmaz, M.H. Omurtag, Dynamic analysis of helicoidal bars with non-circular cross-sections via mixed FEM, *Structural Engineering and Mechanics*. 57 (2016) 221–238. doi:10/f8pd8q.
- [32] A.Y. Aköz, M.H. Omurtag, A.N. Doğruoğlu, The mixed finite element formulation for three-dimensional bars, *International Journal of Solids and Structures*. 28 (1991) 225–234. doi:10/fwb26x.
- [33] J.T. Oden, J.N. Reddy, *Variational methods in theoretical mechanics*, Springer Science & Business Media, 2012.