



FONKSİYONEL DERECELİ DAİRESEL KİRİŞLERİN DİNAMİK ANALİZİ

Umit N. Aribas¹, Mert Atalay¹, Mete Aydın¹, Merve Ermiş² ve Mehmet H. Omurtag¹

¹İstanbul Medipol Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul

²Kırklareli Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Kırklareli

ABSTRACT

In this study, the influence of material gradient index on the vibrations of functionally graded circular beams is presented via the mixed finite element method. The constitutive equations which satisfy the classical beam stress-free surface conditions are enhanced via the warping functions over the displacement-type finite element formulation. The mixed finite element formulation considering the asymmetrical and symmetrical variations of functionally graded material constituents over numerical partitions is derived. The variation of Poisson's ratio through the thickness besides Young modulus is considered. The mixed finite elements have two nodes and twelve degree of freedoms at each node. The dynamic behaviors of functionally graded circular beams obtained via two-noded mixed finite elements are compared to the three-dimensional dynamic behavior of twenty-noded SOLID186 brick elements. Finally, the influence of the asymmetrical and symmetrical variations of functionally graded material constituents through the cross-section on the dynamic behavior of functionally graded circular beams is investigated.

Keywords: Vibration; warping; circular beam; functionally graded material; mixed finite element

ÖZET

Bu çalışmada, karışık sonlu elemanlar metodu kullanılarak fonksiyonel dereceli dairesel kirişlerin dinamik davranışları üzerinde malzeme gradyentinin etkisi sunulmuştur. Klasik kiriş teorisinin gerilme koşullarını sağlayan bünye bağıntılarına, yerdeğiştirme tabanlı sonlu eleman formülasyonuna dayalı çarpılma fonksiyonu entegre edilmiştir. Fonksiyonel dereceli malzeme bileşenlerinin kesitte asimetrik ve simetrik dağılımlarını sayısal katmanlar üzerinden gözetken karışık sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir. Elastisite modülünün yanı sıra Poisson oranının da kesitteki dağılımı gözetilmiştir. Karışık sonlu elemanlar iki düğüm noktasına ve her düğüm noktasında on iki adet serbestlik derecesine sahiptir. İki düğüm noktalı karışık sonlu elemanlarla elde edilen fonksiyonel dereceli dairesel kirişlerin dinamik davranışları, yirmi düğüm noktalı SOLID186 katı elemanlarla elde edilen üç boyutlu dinamik davranışlarla karşılaştırılmıştır. Son olarak, fonksiyonel dereceli malzeme bileşenlerinin kesitte asimetrik ve simetrik dağılımlarının, fonksiyonel dereceli dairesel kirişlerin dinamik davranışı üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Titreşim; çarpılma; dairesel kiriş; fonksiyonel dereceli malzeme; karışık sonlu eleman

GİRİŞ

Geleneksel kompozit malzemelere göre, fonksiyonel dereceli (FD) malzemelerin gerilme yığılmalarını azaltma kabiliyetleri ve ısı dayanımları, FD malzemelerin pek çok uygulama alanında kullanılmasını sağlamıştır. FD malzemelerin yüksek teknoloji uygulamalarında, savunma sanayiinde, uzay araçlarında, otomotiv ve enerji sektöründe, biyomalzemelerde, sağlık sektöründe giderek artan kullanımı, mekanik davranışlarının daha iyi kavranmasını gerektirmektedir. Literatürde, FD doğrusal kirişlerin dinamik davranışlarını klasik kiriş teorileri ve yüksek-mertebeden kayma deformasyon teorileri kullanarak inceleyen çokça çalışma bulunmaktadır. Xiang ve Yang [1] ön ısı gerilmeler altında FD değişken kesitli Timoshenko kirişlerin termo-elastik ve dinamik denklemlerini elde etmiştir. Kapuria *vd.* [2] FD kirişlerin doğal frekansları için önerilen üçüncü-dereceden zig-zag teorisini deneylerle doğrulamıştır. Demir *vd.* [3] FD Timoshenko kirişlerin sonlu elemanlar yöntemi ile serbest titreşimlerini incelemiştir. Nguyen *vd.* [4] eksenel yüklü FD kirişlerin serbest titreşimleri için birinci-dereceden kayma deformasyon teorisi geliştirmiştir. Li *vd.* [5] FD Euler-Bernoulli kirişlerin serbest titreşimleri için kesin deplasman interpolasyon fonksiyonları tanımlı sonlu eleman metodu sunmuştur. Çallıoğlu *vd.* [6] değişken kesitli FD kirişlerin doğal frekanslarını incelemiştir. Su *vd.* [7] FD kirişlerin serbest titreşimleri için Hamilton prensibine ve Wittrick-Williams algoritmasına dayalı dinamik rijitlik formülasyonu geliştirmişlerdir. Vo *vd.* [8] FD kirişlerin doğal frekansları için kayma deformasyon teorisi geliştirmişlerdir. Bourada *vd.* [9] FD kirişlerin titreşiminde kalınlık esneme etkisinin dahil edildiği trigonometrik yüksek-mertebe kiriş teorisi elde etmiştir. Şimşek [10] çift-doğrultuda FD Timoshenko kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimlerini tartışmıştır. Su ve Banerjee [11] dinamik rijitlik metoduyla FD Timoshenko kirişlerin serbest titreşimlerini incelemiştir. Su *vd.* [12] Pasternak zeminine oturan FD Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını sunmuşlardır. Jing *vd.* [13] FD kirişlerin serbest titreşimleri için hücre-merkezli sonlu hacim metoduyla, Timoshenko kiriş teorisinin kombinasyonunu sunmuşlardır. El-Ashmawy *vd.* [14] FD Timoshenko kirişlerin termo-dinamik analizleri için sonlu eleman modeli sunmuşlardır. Kahya ve Turan [15] FD Timoshenko kirişlerin serbest titreşimleri için sonlu eleman modeli geliştirmiştir. Şimşek ve Al-shujairi [16] FD Timoshenko kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimlerini incelemiştir. Lee ve Lee [17] FD Euler-Bernoulli kirişlerin doğal frekansları için kesin transfer matris metodu geliştirmişlerdir. Huynh *vd.* [18] çift-doğrultuda FD Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını tartışmıştır. Zidi *vd.* [19] FD kirişlerin serbest titreşimleri için bir yüksek-mertebe kayma deformasyon teorisi sunmuştur. Karamanlı [20] çift-doğrultuda FD kirişlerin üçüncü-mertebe bir kayma deformasyon teorisi kullanarak serbest titreşim analizlerini yapmıştır. Kahya ve Turan [21] çok-tabakalı sonlu elemanlarla FD Timoshenko kirişlerin serbest titreşimlerini yapmıştır. Chen ve Chang [22] FD Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını çalışmışlardır. Su *vd.* [23] değişken kesitli FD Timoshenko kirişlerin serbest titreşim analizlerini yapmışlardır. Esen [24] iki parametrelili elastik zemine oturan FD Timoshenko kirişlerin zorlanmış titreşimlerini incelemiştir. Koutoati *vd.* [25] Timoshenko ve yüksek-mertebe kiriş teorilerini kullanarak FD sandviç kirişlerin serbest titreşimlerini çalışmıştır. Eltaher ve Akbaş [26] çift-doğrultuda fonksiyonel dereceli yüksek kirişlerin sonlu elemanlar metoduyla zorlanmış titreşimlerini çalışmışlardır. Erdurcan ve Cunedioğlu [27] alüminyum çekirdekli FD Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını sunmuştur. Le *vd.* [28] çift-doğrultuda FD sandviç kirişlerin serbest titreşimleri için üçüncü-mertebeden kayma deformasyon teorili kiriş elemanı elde etmiştir. Ma *vd.* [29] FD silindirik tüplerin üçüncü-mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı titreşimlerini tartışmışlardır. Rahmani *vd.* [30] Euler-Bernoulli, Timoshenko ve yüksek-mertebe kiriş teorilerini kullanarak FD kirişlerin serbest titreşimlerini incelemiştir. FD doğrusal kirişlerin dinamik analizleri detaylı bir şekilde incelenmiş olmasına rağmen, FD eğri kirişlerin dinamik davranışları üzerine çalışmalar oldukça azdır. Piovan *vd.* [31] ön

gerilmeli FD dairesel kirişlerin dinamik davranışını sonlu elemanlar metoduyla incelemiştir. Fariborz ve Batra [32] çift-doğrultuda FD dairesel kirişlerin doğal frekanslarını sunmuşlardır.

Bu çalışma kapsamında, malzeme gradyenti değişiminin FD dairesel kirişlerin çarpılma etkisi gözetilen serbest ve zorlanmış titreşimleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Ortotrop malzeme sabitlerinin varyasyonunu dahil edebilecek bir biçimde üç boyutlu bünye bağıntıları, klasik çubuk kuramı üzerinden, FD kesitin sayısal katmanlarına uygulanmıştır. FD malzeme bileşenlerinin simetrik ve asimetrik varyasyonlarını içeren karışık sonlu eleman formülasyonuna çarpılma fonksiyonu, yerdeğiştirme tabanlı sonlu elemanlarla entegre edilmiştir. Zorlanmış titreşim analizlerinde ortalama sabit ivmelenmeli Newmark metodu kullanılmıştır. Karışık sonlu elemanlar her düğüm noktasında on iki serbestlik derecesine sahiptir. Karışık sonlu eleman doğal frekansları ve zorlanmış titreşimde serbest uç yerdeğiştirme ve mesnet reaksiyonları SOLID186 elemanlarla elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. FD dairesel kirişlerde malzeme gradyentinin serbest ve zorlanmış titreşimler üzerindeki etkisi literatüre kazandırılmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Üç-boyutlu gerilme ve şekil değiştirme vektörleri sırasıyla σ ve ϵ , ve elastisite matrisi E olmak üzere Hooke Kanunu $\sigma = E\epsilon$ ile ifade edilir [33]. Klasik çubuk kuramındaki gerilme kabulleri [34] kullanılarak Hooke Kanunu, çubuk teorisine indirgenirse, $\sigma_L = \beta_L \epsilon_L$. Burada, Frenet koordinatları t, n, b olmak üzere indirgenmiş gerilme ve şekil değiştirme vektörleri sırasıyla, $\sigma_L = \{\sigma_t \quad \tau_{bt} \quad \tau_m\}_L^T$ ve $\epsilon_L = \{\epsilon_t \quad \gamma_{bt} \quad \gamma_m\}_L^T$, indirgenmiş elastisite matrisi β_L , ve fonksiyonel dereceli kesit L adet sayısal katman ile tanımlanmaktadır. Çubuk kesitindeki yer değiştirmelerin u_t^*, u_n^*, u_b^* , eksenindeki yer değiştirmeler u_t, u_n, u_b ve dönmeler $\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b$ üzerinden kinematik bağıntıları $u_t^* = u_t + b\Omega_n - n\Omega_b$, $u_n^* = u_n - b\Omega_t$ ve $u_b^* = u_b + n\Omega_t$ kullanılarak, indirgenmiş gerilme-şekil değiştirme bağıntıları [35],

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \tau_{bt} \\ \tau_m \end{Bmatrix}_L = \beta_L \left\{ \begin{Bmatrix} u_{t,t} \\ u_{b,t} \\ u_{n,t} \end{Bmatrix} + b \begin{Bmatrix} \Omega_{n,t} \\ 0 \\ -\Omega_{t,t} \end{Bmatrix} + n \begin{Bmatrix} -\Omega_{b,t} \\ \Omega_{t,t} \\ 0 \end{Bmatrix} \right\}_L, \quad L = 1, \dots, N \quad (1)$$

Burada, alt indiste bulunan virgül kısmi türevleri, N ise kullanılan toplam sayısal katmanı ifade etmektedir. Fonksiyonel dereceli malzeme bileşenlerinin kesitteki asimetrik ve simetrik varyasyonları Power-law kuralına göre kabul edilmiştir,

$$f(b) = f_{alt} + (f_{üst} - f_{alt}) \left(0.5 + \frac{b}{h} \right)^m; \quad f(b) = f_{aks} + (f_{alt} - f_{aks}) \left(\frac{2|b|}{h} \right)^m \quad (2)$$

Burada, $f(b)$, elastisite modülü E , kayma modülü G veya yoğunluğun ρ varyasyonunu ifade eden fonksiyondur. Alt indisler “alt”, “aks” ve “üst” sırasıyla kesitin alt, orta ve üstünü, h toplam kesit yüksekliğini, ve m malzeme gradyentini ifade etmektedir. Fonksiyonel dereceli kesit başlangıçta elli sayısal katmana ayrılmıştır. Eğer bir sayısal katmanın alt ve üst sınırlarındaki malzeme değerlerinin mutlak farkı, elli sayısal katmanlı kesitte lineer varyasyona karşı gelen malzeme değerlerinin mutlak farkını aşıyorsa, bu aralıkta katman sıklaştırılmasına gidilmiştir.

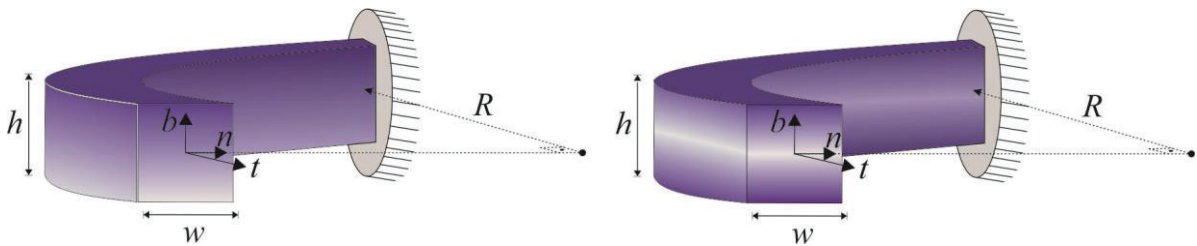
Çubuk kesitindeki kuvvetler F_t, F_n, F_b ve momentler M_t, M_n, M_b gerilmelerin analitik integrasyonu ile ifade edilmiştir [36,37]. Komplians matrisi $\mathbf{C}$ kullanılarak, bünye bağıntıları matris formda,

$$\begin{Bmatrix} u_{t,t} \\ u_{n,t} \\ u_{b,t} \\ \Omega_{t,t} \\ \Omega_{n,t} \\ \Omega_{b,t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{C}_{mf} \\ \mathbf{C}_{fm} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_t \\ F_n \\ F_b \\ M_t \\ M_n \\ M_b \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Burada, $\mathbf{C}_{mf}$ ve $\mathbf{C}_{fm}$ kuple etkileri ifade eden komplians alt matrisleridir. Kesit çarpılmasını içeren burulma rijitliği formülasyonu [38], bünye bağıntılarında (3) ilgili terimlere entegre edilmiştir. Timoshenko uzaysal kirişlerin alan denklemlerinin [39] kompozit kirişlere genişletilen tanımı [37]'de yapılmıştır. Alan denklemleri ve Gâteaux türevi [40] kullanılarak elde edilen fonksiyonel,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{y}) = & -[\mathbf{F}_{,s}, \mathbf{u}] - [\mathbf{M}_{,s}, \mathbf{\Omega}] + [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{F}] - \frac{1}{2} \{ [\mathbf{C}_m \mathbf{F}, \mathbf{F}] + [\mathbf{C}_{mf} \mathbf{M}, \mathbf{F}] \\ & + [\mathbf{C}_{fm} \mathbf{F}, \mathbf{M}] + [\mathbf{C}_f \mathbf{M}, \mathbf{M}] \} - \frac{1}{2} \rho A \omega^2 [\mathbf{u}, \mathbf{u}] - \frac{1}{2} \rho \omega^2 [\mathbf{I} \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}] \\ & + [(\mathbf{F} - \hat{\mathbf{F}}), \mathbf{u}]_{\sigma} + [(\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}), \mathbf{\Omega}]_{\sigma} + [\mathbf{F}, \hat{\mathbf{u}}]_{\varepsilon} + [\mathbf{M}, \hat{\mathbf{\Omega}}]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4)$$

Burada, çubuk kesitindeki yerdeğiştirme, dönme, kuvvet ve momentler sırasıyla $\mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{M}$ ile, malzeme yoğunluğu ρ ve kesit alanı A ile, atalet momentleri $\mathbf{I}$ ile ifade edilmektedir. Zorlanmış titreşim analizinde fonksiyonelden $-\frac{1}{2} \rho A \omega^2 [\mathbf{u}, \mathbf{u}]$ ve $-\frac{1}{2} \rho \omega^2 [\mathbf{I} \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}]$ çıkarılmakta, yerine $-\mathbf{[q, u]}$ ve $-\mathbf{[m, \Omega]}$ terimleri girmektedir. Zorlanmış titreşim analizi için Newmark metodunda ortalama sabit ivmelenme kullanılmıştır [41,42]. Her düğüm noktasında üç yerdeğiştirme, üç kesit dönmesi, üç kuvvet ve üç kesit dönmesi içeren iki düğüm noktalı eğrisel karışık sonlu elemanlar kullanılmıştır.



Şekil 1. Asimetrik/Simetrik fonksiyonel dereceli dairesel kiriş.

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, öncelikle FD dairesel kirişlerin çarpılma etkisi gözetilen serbest ve zorlanmış titreşimleri için sunulan karışık sonlu eleman formülasyonunun eleman ağı yakınsama çalışmaları verilmiştir. İki düğüm noktalı eğrisel karışık sonlu elemanlarla elde edilen, doğal frekanslar, ve zorlanmış titreşimlerde serbest uç yerdeğiştirmeleri ve mesnet reaksiyonları, yirmi düğüm noktalı SOLID186 elemanların sonuçlarıyla kıyaslanmıştır. Son olarak, malzeme gradyentinin FD dairesel kirişlerin dinamik davranışı üzerindeki etkisi incelenerek literatüre kazandırılmıştır. Kullanılan FD malzeme bileşenleri alumina (Al_2O_3) ve

alüminyum (Al) için, elastisite modülleri sırasıyla $E = 380\text{GPa}$ ve 70GPa , kayma modülleri sırasıyla $G = 146.154\text{GPa}$ ve 26.316GPa , Poisson oranları sırasıyla $\nu = 0.30$ ve 0.33 'tür.

Sonlu Eleman Ağı Yakınsama Analizi

Bu sayısal çalışma kapsamında elde edilen bulgular ile FD dairesel kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşim analizlerinde yeterli yakınsaklığı sağlayan karışık sonlu eleman adedi ve adım sayıları belirlenmektedir. Sonlu eleman ağı yakınsama analizi çalışmalarında, yarıçapı $R = 1.0\text{m}$ olan çeyrek daire FD konsol kiriş ele alınmıştır (Şekil 1). FD kare kesitin genişliği $w = 0.012\text{m}$ ve yüksekliği $h = 0.012\text{m}$ 'dir. FD malzeme bileşenleri kesit alt ve üst yüzlerinde sırasıyla Al ve Al_2O_3 olup, malzeme gradyenti $m = 1$ 'dir. Zorlanmış titreşim analizlerinde, FD konsol kirişin serbest ucuna $0s \leq t_{\text{yük}} \leq 1s$ zaman aralığında düzlem dışı, $-z$ doğrultusunda, $P = 1\text{N}$ adım tipi impulsif yükleme uygulanmaktadır. Yerdeğiştirmeler ve mesnet reaksiyonları $0s \leq T \leq 4s$ zaman aralığında elde edilmiştir.

Serbest Titreşim: İlk üç doğal frekans ω , sırasıyla 50, 60, 70, 80, 90 ve 100 karışık sonlu elemanlarla (MFE) elde edilmiştir. Her bir karışık sonlu eleman adedindeki düğüm noktası koordinatlarından yararlanılarak ilgili çeyrek çember FD konsol kirişler SOLID186 elemanlarla modellenmiştir. Sırasıyla 612, 732, 852, 972, 1092, 1212 serbestlik derecelerine sahip 50, 60, 70, 80, 90 ve 100 karışık SE sonuçları, toplam 863550 serbestlik derecesine (eleman boyutu 0.006m) sahip SOLID186 eleman sonuçlarıyla kıyaslanmıştır (Çizelge 1). Karışık sonlu eleman doğal frekansları SOLID186 elemanların doğal frekansları ile uyumludur.

Çizelge 1. Sonlu eleman ağı yakınsaması, doğal frekanslar ω (Hz).

$$\% \text{Fark} = ((\text{MFE}/\text{SOLID186}) - 1) \times 100.$$

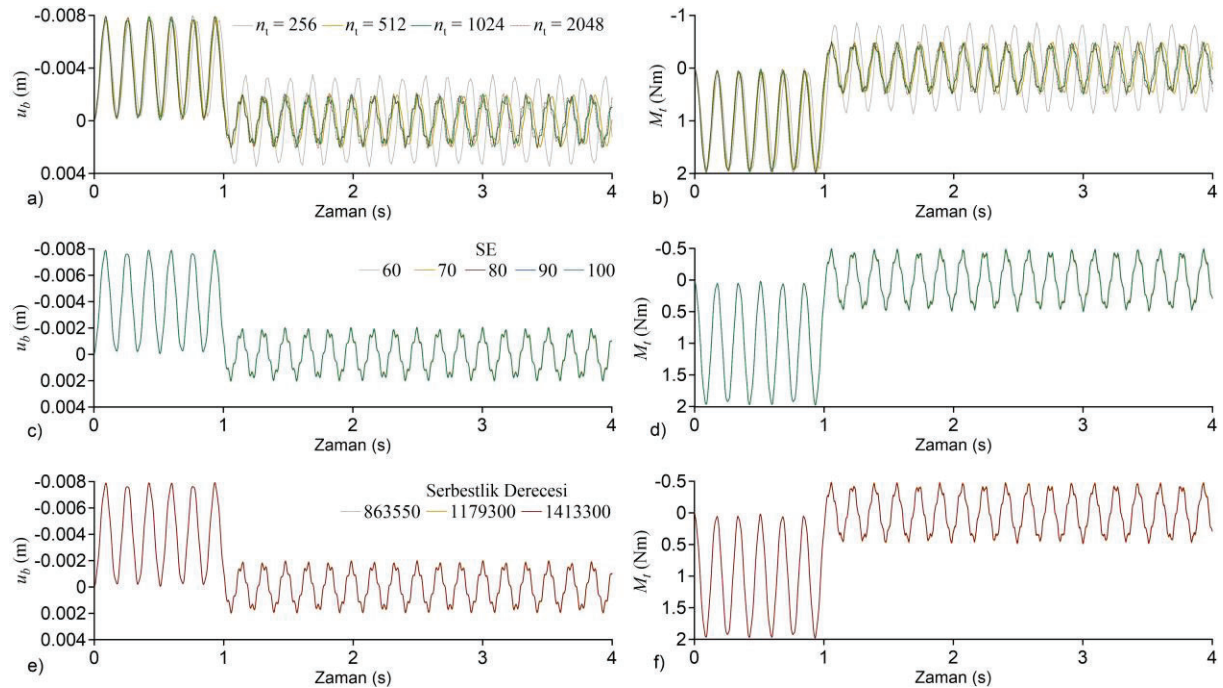
FE	MFE			SOLID186			%Fark		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
50	5.960	6.789	28.836	5.911	6.767	28.610	0.82	0.33	0.79
60	5.960	6.789	28.837	5.911	6.767	28.610	0.82	0.33	0.79
70	5.960	6.789	28.837	5.921	6.768	28.622	0.67	0.31	0.75
80	5.960	6.789	28.837	5.915	6.767	28.610	0.77	0.33	0.79
90	5.960	6.789	28.837	5.918	6.767	28.607	0.71	0.33	0.80
100	5.960	6.789	28.837	5.910	6.767	28.608	0.84	0.33	0.80

Zorlanmış Titreşim: İlk olarak, serbest titreşim analizlerinde yeteri yakınsaklığı sağlayan 60 MFE'nin düğüm noktası koordinatlarından yararlanılarak çeyrek çember FD konsol kiriş, SOLID186 elemanlarla modellenmiştir. ANSYS SOLID186 elemanlar için en büyük eleman boyu 0.006m seçilerek $0s \leq T \leq 4s$ tanımlı zaman aralığında sırasıyla $n_t = 256, 512, 1024$ ve 2048 zaman adımı için serbest uç yerdeğiştirmesi u_b ve mesnet reaksiyonu M_t elde edilmiştir (Şekil 2a, b). $n_t = 256, 512, 1024$ ve 2048 zaman adımı için elde edilen pik serbest uç yerdeğiştirmeleri sırasıyla $u_b = -0.0077\text{m}$ (0.09375s), -0.0079m (0.42969s), -0.0079m (0.92969s) ve -0.0080m (0.08789s)'dir (Şekil 2a). Elde edilen pik u_b serbest uç yerdeğiştirmelerinin $n_t = 2048$ zaman adımına göre yüzdesel farkları $n_t = 256, 512$ ve 1024 için sırasıyla %-3.33, %-1.24 ve %-0.52 olmaktadır. $n_t = 256, 512, 1024$ ve 2048 zaman adımı için elde edilen pik mesnet reaksiyonları sırasıyla $M_t = 1.924\text{Nm}$ (0.09375s), 1.958Nm (0.42969s), 1.979Nm (0.93359s) ve 1.987Nm (0.93359s)'dir (Şekil 2b). Elde edilen pik M_t

mesnet reaksiyonlarının $n_t = 2048$ zaman adımına göre yüzdesel farkları $n_t = 256, 512$ ve 1024 için sırasıyla %-3.15, %-1.44 ve %-0.40 olmaktadır. Zaman adımı $n_t = 1024$ için yeterli yakınsaklık elde edilmektedir.

Zaman adımı $n_t = 1024$ kullanılarak, sırasıyla 60, 70, 80, 90 ve 100 MFE'nin düğüm noktası koordinatları üzerinden SOLID186 elemanlarla oluşturulan çeyrek daire FD konsol kirişler çözülmüştür (Şekil 2c, d). Her bir çözümden elde edilen pik serbest uç yerdeğiştirmesi $u_b \cong -0.00792\text{m}$ (0.92969s) ve pik mesnet reaksiyonu $M_t \cong 1.979\text{Nm}$ (0.93379s) olmaktadır. 60 MFE'nin düğüm noktası koordinatları üzerinden modellenen SOLID186 elemanların 100 MFE'den modellenene göre yüzdesel farkları u_b ve M_t için sırasıyla %0.015 ve %0.004 olmaktadır. 60 MFE'nin düğüm noktası koordinatlarıyla modellenen SOLID186 elemanlar yeterli yakınsaklığı sağlamaktadır.

SOLID186 elemanlarla $n_t = 1024$ zaman adımı ve 60 MFE'nin düğüm noktası koordinatları kullanılarak oluşturulan ANSYS modelinde sonlu eleman ağı yakınsaması çalışmaları yapılmıştır. Çeyrek çember FD konsol kiriş için sırasıyla en büyük sonlu eleman boyu 0.0060m, 0.0055m ve 0.0050m'ye karşı gelen toplam serbestlik dereceleri 863550, 1179300 ve 1413300 için sonuçlar elde edilmiştir (Şekil 2e, f). Her bir serbestlik derecesi için, pik serbest uç yerdeğiştirmeleri $u_b \cong -0.0079\text{m}$ (0.929690s) ve pik mesnet reaksiyonu $M_t \cong 1.979\text{Nm}$ olmaktadır. 863550 ve 1179300 toplam serbestlik dereceleri ile elde edilen sonuçlarının 1413300 toplam serbestlik derecesi sonucuna göre yüzdesel farkı, u_b için sırasıyla %0.054 ve %0.052 ve M_t için sırasıyla %0.076 ve %0.081'dir.



Şekil 2. Zorlanmış titreşim, Sonlu eleman ağı yakınsaması, SOLID186 elemanlar.

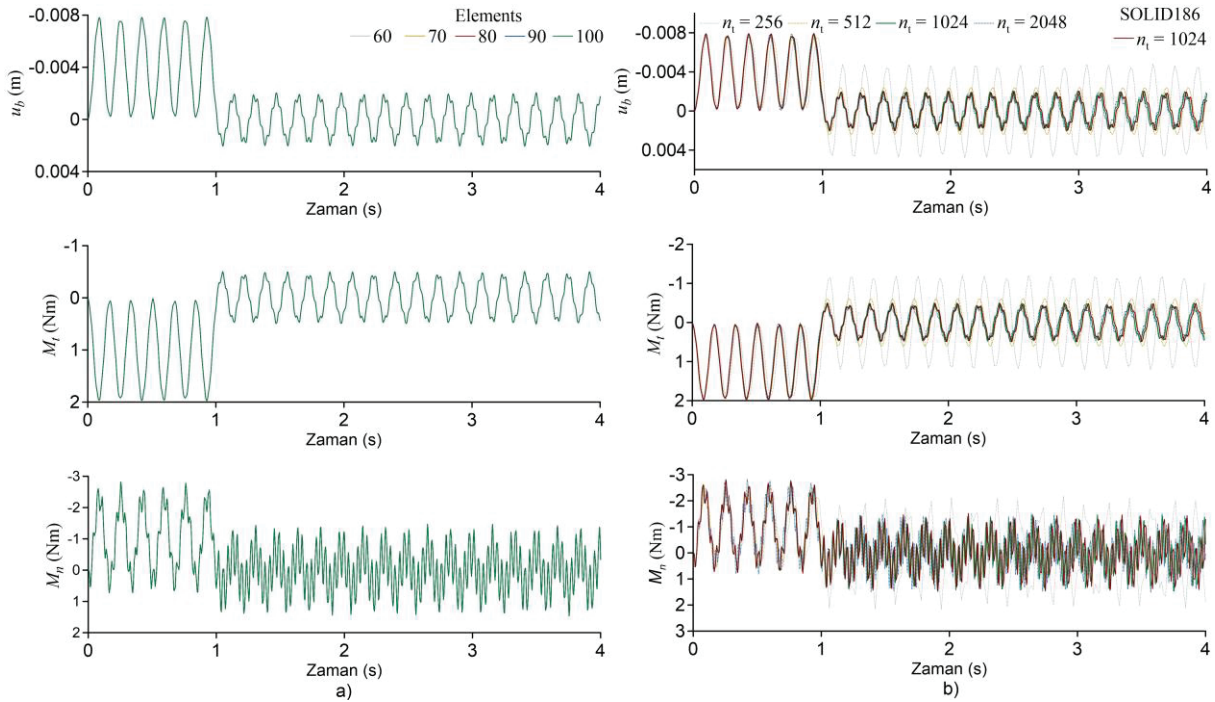
Karışık Sonlu Elemanlar: $0s \leq T \leq 4s$ tanımlı zaman aralığında $n_t = 1024$ zaman adımı için serbest uç yerdeğiştirmeleri u_b , ve mesnet reaksiyonları M_t ve M_n sırasıyla 60, 70, 80, 90, 100 karışık sonlu elemanlarla elde edilmiştir (Şekil 3a). Her bir karışık sonlu eleman çözümünden elde edilen pik serbest uç yerdeğiştirmeleri $u_b = -0.0078\text{m}$ (0.92969s), pik

mesnet reaksiyonu $M_t = 1.974\text{Nm}$ (0.92969s), ve pik mesnet reaksiyonu $M_n = -2.816\text{Nm}$ (0.25391s) olarak elde edilmiştir. 60, 70, 80 ve 90 karışık sonlu eleman sonuçlarının, 100 karışık sonlu eleman sonuçlarına yüzdesel farkı, u_b için sırasıyla %0.003, %0.002, %0.001 ve %0.000, M_t için sırasıyla %-0.004, %-0.003, %-0.001 ve %-0.001, ve M_n için sırasıyla %-0.013, %-0.007, %-0.004 ve %-0.002 olmaktadır. 60 karışık sonlu eleman kullanılarak elde edilen sonuçların yeterli yakınsaklıkta olduğu görülmektedir.

Zaman adımı yakınsama çalışmaları için $n_t = 256, 512, 1024$ ve 2048 zaman adımları kullanılarak 60 karışık sonlu elemanlarla sonuçlar alınmış, ve $n_t = 1024$ ve 863550 serbestlik derecesi ile elde edilen SOLID186 eleman sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır (Şekil 3b). Karışık sonlu eleman analizlerinde $n_t = 1024$ zaman adımı kullanılarak elde edilen sonuçlar yeteri yakınsaklığı sağlamaktadır (Çizelge 2). $n_t = 1024$ zaman adımı kullanılarak elde edilen 732 serbestlik derecesine sahip karışık sonlu eleman sonuçlarının, 863550 serbestlik derecesine sahip SOLID186 eleman sonuçlarına yüzdesel farkı, pik u_b , M_t ve M_n için sırasıyla %-1.01, %-0.27 ve %0.71 olmaktadır. Parametrik analizler, 60 karışık sonlu eleman ve $n_t = 1024$ zaman adımı kullanılarak alınacaktır.

Çizelge 2. Zaman adımı n_t yakınsama analizi (MFEM). Birimler N-m'dir. %Fark, ilgili $n_t = 2048$ sonuçlarına göre verilmiştir.

n_t	u_b	%Fark	M_t	%Fark	M_n	%Fark
256	-0.0076	-3.41	1.924	-3.07	-2.526	-10.83
512	-0.0077	-1.67	1.952	-1.66	-2.623	-7.42
1024	-0.0078	-0.54	1.974	-0.55	-2.816	-0.60
2048	-0.0079	-	1.985	-	-2.833	-



Şekil 3. Zorlanmış titreşim, Sonlu eleman ağı yakınsaması, MFE.

Malzeme Gradyentinin Dinamik Davranışa Etkisi

Bu sayısal çalışmada, çeyrek daire FD konsol kirişlerin malzeme gradyentinin serbest ve zorlanmış titreşimler üzerindeki etkisi incelenmiştir. Çeyrek daire FD konsol kirişin yarıçapı $R = 1.0\text{m}$ 'dir. FD kare kesitin genişliği ve yüksekliği 0.012m olup, asimetric FD malzeme varyasyonunda kesit alt ve üst yüzü sırasıyla Al ve Al_2O_3 , simetrik FD malzeme varyasyonunda aks düzleminde ve dış yüzlerde sırasıyla Al ve Al_2O_3 bulunmaktadır. Malzeme gradyentinin $m = 1.0, 2.0$ ve 3.0 olduğu durumlar için doğal frekanslar, ve zorlanmış titreşimde serbest uç yerdeğiştirmeleri ve mesnet reaksiyonları elde edilmiştir. Zorlanmış titreşim analizinde, $P = 1\text{N}$ adım tipi impulsif düzlem dışı yükleme (-z doğrultusunda) FD konsol kirişin serbest ucuna $0s \leq t_{\text{yük}} \leq 1s$ zaman aralığında uygulanmış ve dinamik davranış $0s \leq T \leq 4s$ aralığında elde edilmiştir. 60 karışık sonlu eleman ve $n_t = 1024$ zaman adımı kullanılarak çözümler alınmıştır.

Serbest Titreşim: Çeyrek daire FD konsol kirişte asimetric ve simetrik malzeme varyasyonu için malzeme gradyentinin değışimine bağılı olarak ilk üç doğal frekans $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ Çizelge 3'te verilmektedir. Asimetric FD malzeme varyasyonuna sahip kesitte malzeme gradyentinin $m = 2$ ve 3 olduğu durumlarda sırasıyla lineer malzeme varyasyonuna nazaran birinci doğal frekanslarda %-9.28 ve %-12.87 azalma meydana gelmektedir. Buna karşın malzeme gradyentinin artması ikinci doğal frekanslarda daha etkili olmuştur (Çizelge 3). Simetrik FD malzeme varyasyonuna sahip kesitlerde ise malzeme gradyentinin artarak $m = 2$ ve 3 olması ilk üç doğal frekanstan birinci doğal frekansta daha etkili olmuştur. Malzeme gradyentinin $m = 2$ ve 3 olduğu durumlarda lineer malzeme varyasyonuna göre birinci doğal frekanstaki azalma sırasıyla %-9.31 ve %-14.89 olmaktadır.

Çizelge 3. Malzeme gradyentinin doğal frekanslar ω (Hz) üzerinde etkisi. %Farklar $m = 1$ 'e göre verilmektedir.

	Asimetric FD Kesit					Simetrik FD Kesit				
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	%Fark		$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	%Fark	
				$m = 2$	$m = 3$				$m = 2$	$m = 3$
ω_1	5.96	5.41	5.19	-9.28	-12.87	6.79	6.16	5.78	-9.31	-14.89
ω_2	6.79	6.16	5.78	-9.32	-14.91	7.00	6.50	6.19	-7.12	-11.54
ω_3	28.84	26.18	25.19	-9.21	-12.66	32.73	29.68	27.85	-9.31	-14.89

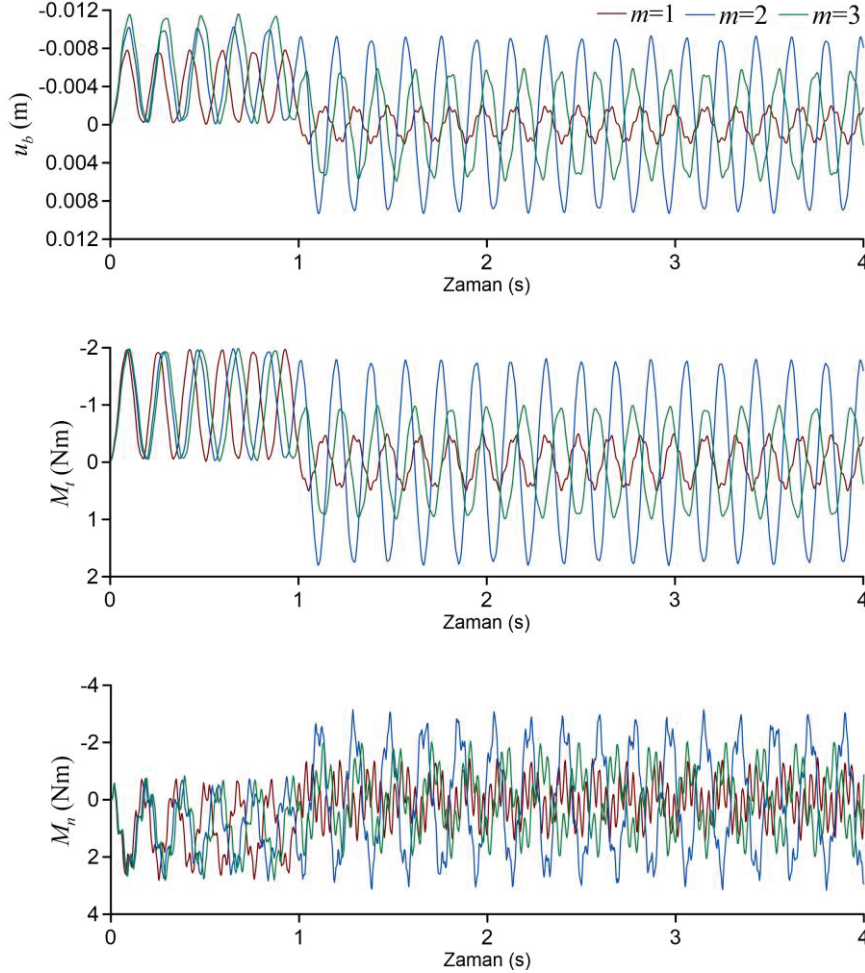
Zorlanmış Titreşim: Malzeme gradyentinin artışına bağılı olarak ($m = 1, 2, 3$) çeyrek daire FD konsol kirişin serbest uç yerdeğiştirmesi u_b ve mesnet reaksiyonları M_t , M_n FD malzeme bileşenlerinin asimetric ve simetrik varyasyonu için sırasıyla Şekil 4 ve Şekil 5'te verilmiştir.

Asimetric FD, u_b : $m = 1, 2$ ve 3 için sırasıyla pik değerleri $u_b = -0.0078\text{m}$ (0.92969s), $u_b = -0.0102\text{m}$ (0.65234s) ve $u_b = -0.0116\text{m}$ (0.67969s) olmaktadır (Şekil 4). Malzeme gradyenti $m = 2$ ve $m = 3$ 'e arttıkça, lineer varyasyona ($m = 1$) göre u_b pik değerleri sırasıyla %30.57 ve %48.19 artmaktadır. Zorlanmış titreşim bölgesinde u_b için mutlak değerce en büyük pik değerler $m = 3$ olduğunda elde edilirken, serbest titreşim bölgesinde $m = 2$ olduğunda elde edilmektedir.

Asimetric FD, M_t : $m = 1, 2$ ve 3 için sırasıyla pik değerleri $M_t = -1.9736\text{Nm}$ (0.92969s), $M_t = -1.9831\text{Nm}$ (0.65234s) ve $M_t = -1.9891\text{Nm}$ (0.67969s) olmaktadır (Şekil 4).

Malzeme gradyenti artışı $m = 2$ ve $m = 3$, mesnet reaksiyonu M_i için lineer varyasyona ($m = 1$) göre sırasıyla %0.48 ve %0.78 artış meydana getirmektedir. Serbest titreşim bölgesinde mutlak değerce en büyük M_i pik değerleri $m = 2$ için elde edilmiştir.

Asimetrik FD, M_n : $m = 1, 2$ ve 3 için sırasıyla pik değerleri $M_n = 2.8159\text{Nm}$ (0.25391s), $M_n = 3.1639\text{Nm}$ (3.80078s) ve $M_n = 2.8155\text{Nm}$ (0.28906s) olmaktadır (Şekil 4). Serbest titreşim bölgesinde en fazla pik değerleri $m = 2$ için elde edilmektedir.



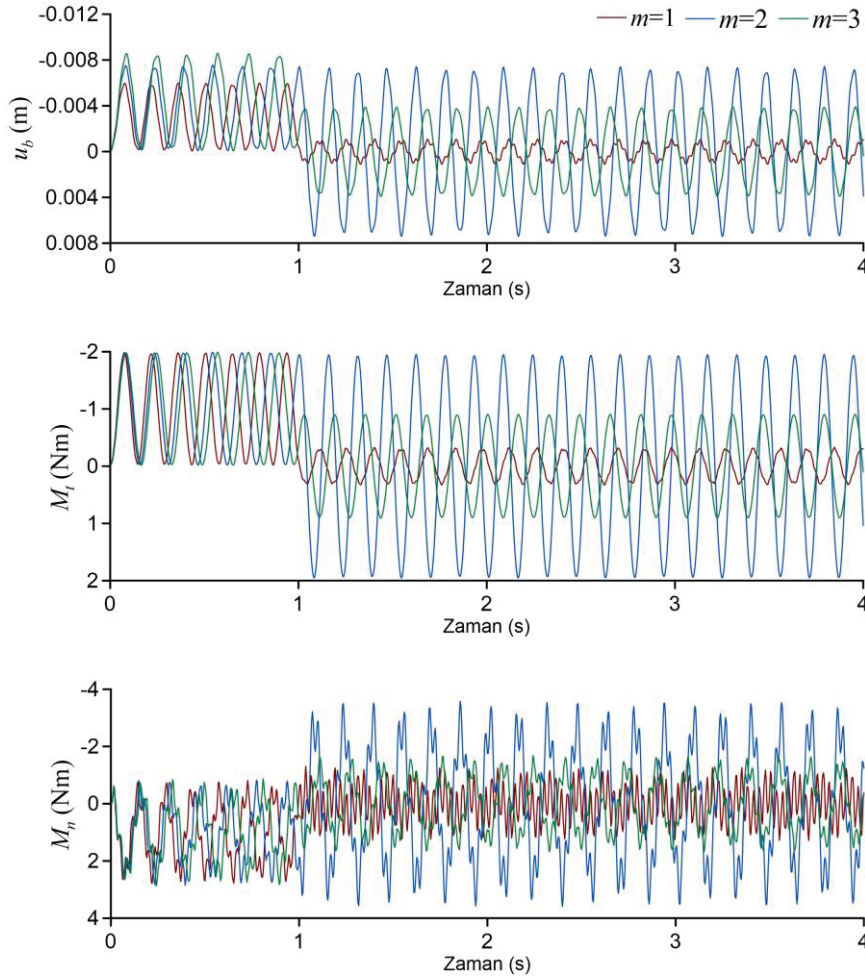
Şekil 4. Zorlanmış titreşim, çeyrek daire asimetrik FD konsol kiriş, malzeme gradyenti m .

Simetrik FD, u_b : $m = 1, 2$ ve 3 için sırasıyla pik değerleri $u_b = -0.0060\text{m}$ (0.35938s), $u_b = -0.0075\text{m}$ (0.54297s) ve $u_b = -0.0086\text{m}$ (0.57031s) olmaktadır (Şekil 5). Malzeme gradyenti arttıkça $m = 2$ ve 3 , lineer FD malzeme varyasyonuna göre u_b pik değerleri sırasıyla %25.99 ve %43.73 artmaktadır. Zorlanmış titreşim bölgesinde en fazla pik değerleri $m = 3$ için elde edilirken, serbest titreşim bölgesinde $m = 2$ için elde edilmektedir. Asimetrik FD malzeme dağılımına göre u_b pik değerleri $m = 1, 2$ ve 3 için sırasıyla %-23.63, %-26.31 ve %-25.93 azalmaktadır.

Simetrik FD, M_i : $m = 1, 2$ ve 3 için sırasıyla pik değerleri $M_i = -1.9840\text{Nm}$ (0.07422s), $M_i = -1.9907\text{Nm}$ (0.54297s) ve $M_i = -1.9922\text{Nm}$ (0.57031s) olmaktadır (Şekil 5). $m = 2$ ve $m = 3$ için, lineer varyasyona ($m = 1$) göre M_i sırasıyla %0.34 ve %0.41 daha fazla

olmaktadır. Asimetrik FD malzeme varyasyonuna göre $m = 1, 2$ ve 3 için simetrik malzeme varyasyonunda M_t sırasıyla %0.53, %0.38 ve %0.15 daha fazladır.

Simetrik FD, M_n : $m = 1, 2$ ve 3 için sırasıyla pik değerleri $M_n = 2.7882\text{Nm}$ (0.21875s), $M_n = 3.5873\text{Nm}$ (2.39844s) ve $M_n = 2.8695\text{Nm}$ (0.24219s) olmaktadır. Serbest titreşim bölgesinde en fazla pik değeri $m = 2$ için elde edilmiştir. Simetrik FD malzeme varyasyonunda $m = 2$ için elde edilen en büyük pik değeri, asimetrik FD malzeme varyasyonunkinden %13.38 fazladır.



Şekil 5. Zorlanmış titreşim, çeyrek daire simetrik FD konsol kiriş, malzeme gradyenti m .

SONUÇLAR

Fonksiyonel dereceli (FD) dairesel kirişlerde malzeme gradyentinin çarpılma etkisi dahil edilmiş dinamik davranışları üzerindeki etkisi karışık sonlu elemanlarla incelenmiştir. Karışık sonlu elemanlar iki düğüm noktasına ve her düğüm noktasında üç adet yerdeğiştirme, üç adet dönme, bir eksenel kuvvet, iki kesme kuvveti, bir burulma moment ve iki eğilme momenti olmak üzere toplam yirmi dört adet serbestliğe sahiptir. Çarpılma fonksiyonu, yerdeğiştirme tabanlı sonlu eleman formülasyonunun, karışık sonlu eleman formülasyonuna entegre edilmesiyle dahil edilmiştir. Çeyrek daire FD konsol kirişlerin doğal frekansları, ve düzlem dışı yüklemeler altında yerdeğiştirme ve mesnet reaksiyonları karışık sonlu elemanlarla elde edilerek, ANSYS SOLID186 eleman sonuçlarıyla kıyaslanmıştır. Sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. FD malzeme bileşenlerinin kesitte asimetrik ve simetrik varyasyonları

için malzeme gradyentinin dinamik davranış üzerindeki etkisi incelenmiştir. Asimetrik FD malzeme varyasyonunda serbest uç yerdeğiştirmeleri malzeme gradyentinin değişiminden simetrik FD malzeme varyasyonuna göre daha fazla etkilenmektedir. Asimetrik ve simetrik FD malzeme varyasyonlarının ikisinde de serbest uç yerdeğiştirmeleri serbest titreşim bölgesinde malzeme gradyentinin $m = 2$ olduğu durumda, fakat zorlanmış titreşim bölgesinde $m = 3$ olduğunda elde edilmiştir.

Teřekkür- Bu araştırma TÜBİTAK 2209-A programı kapsamında ve Kırklareli Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüęü tarafından desteklenmiştir (Proje No: KLÜBAP205).

KAYNAKLAR

- [1] H.J. Xiang, J. Yang, Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction, *Composites Part B: Engineering*. 39 (2008) 292–303. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2007.01.005>.
- [2] S. Kapuria, M. Bhattacharyya, A.N. Kumar, Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation, *Composite Structures*. 82 (2008) 390–402. <https://doi.org/10/dn3mz9>.
- [3] E. Demir, H. Çallioęlu, M. Sayer, Free vibration of symmetric FG sandwich Timoshenko beam with simply supported edges, *IJEMS Vol.20(6)* [December 2013]. (2013). <http://nopr.niscair.res.in/handle/123456789/25586> (accessed December 21, 2020).
- [4] T.-K. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*. 55 (2013) 147–157. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.011>.
- [5] S. Li, J. Hu, C. Zhai, L. Xie, A Unified Method for Modeling of Axially and/or Transversally Functionally Graded Beams with Variable Cross-Section Profile, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 41 (2013) 168–188. <https://doi.org/10/gf8xd5>.
- [6] H. Çallioęlu, E. Demir, Y. Yılmaz, M. Sayer, Vibration Analysis of Functionally Graded Sandwich Beam with Variable Cross-Section, *Mathematical and Computational Applications*. 18 (2013) 351–360. <https://doi.org/10.3390/mca18030351>.
- [7] H. Su, J.R. Banerjee, C.W. Cheung, Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams, *Composite Structures*. 106 (2013) 854–862. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.029>.
- [8] T.P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, F. Inam, Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory, *Meccanica*. 49 (2014) 155–168. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9780-1>.
- [9] M. Bourada, A. Kaci, M.S.A. Houari, A. Tounsi, A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams, *Steel and Composite Structures*. 18 (2015) 409–423. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.18.2.409>.
- [10] M. şimşek, Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions, *Composite Structures*. 133 (2015) 968–978. <https://doi.org/10/f7v596>.
- [11] H. Su, J.R. Banerjee, Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams, *Computers & Structures*. 147 (2015) 107–116. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.10.001>.

- [12] Z. Su, G. Jin, Y. Wang, X. Ye, A general Fourier formulation for vibration analysis of functionally graded sandwich beams with arbitrary boundary condition and resting on elastic foundations, *Acta Mechanica*. 227 (2016) 1493–1514.
- [13] L. Jing, P. Ming, W. Zhang, L. Fu, Y. Cao, Static and free vibration analysis of functionally graded beams by combination Timoshenko theory and finite volume method, *Composite Structures*. 138 (2016) 192–213. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.027>.
- [14] A.M. El-Ashmawy, M.A. Kamel, M.A. Elshafei, Thermo-mechanical analysis of axially and transversally Function Graded Beam, *Composites Part B: Engineering*. 102 (2016) 134–149. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.07.015>.
- [15] V. Kahya, M. Turan, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*. 109 (2017) 108–115. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.039>.
- [16] M. Şimşek, M. Al-shujairi, Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads, *Composites Part B: Engineering*. 108 (2017) 18–34. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.098>.
- [17] J.W. Lee, J.Y. Lee, Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression, *International Journal of Mechanical Sciences*. 122 (2017) 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.011>.
- [18] T.A. Huynh, X.Q. Lieu, J. Lee, NURBS-based modeling of bidirectional functionally graded Timoshenko beams for free vibration problem, *Composite Structures*. 160 (2017) 1178–1190. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.076>.
- [19] M. Zidi, M.S.A. Houari, A. Tounsi, A. Bessaim, S.R. Mahmoud, A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams, *Structural Engineering and Mechanics*. 64 (2017) 145–153. <https://doi.org/10.12989/sem.2017.64.2.145>.
- [20] A. Karamanlı, Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory, *Composite Structures*. 189 (2018) 127–136. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.060>.
- [21] V. Kahya, M. Turan, Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element, *Composites Part B: Engineering*. 146 (2018) 198–212. <https://doi.org/10/gdvj9d>.
- [22] W.-R. Chen, H. Chang, Vibration Analysis of Functionally Graded Timoshenko Beams, *Int. J. Str. Stab. Dyn*. 18 (2017) 1850007. <https://doi.org/10.1142/S0219455418500074>.
- [23] Z. Su, G. Jin, T. Ye, Vibration analysis of multiple-stepped functionally graded beams with general boundary conditions, *Composite Structures*. 186 (2018) 315–323. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.018>.
- [24] I. Esen, Dynamic response of a functionally graded Timoshenko beam on two-parameter elastic foundations due to a variable velocity moving mass, *International Journal of Mechanical Sciences*. 153–154 (2019) 21–35. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.01.033>.
- [25] K. Koutoati, F. Mohri, E.M. Daya, Finite element approach of axial bending coupling on static and vibration behaviors of functionally graded material sandwich beams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 0 (2019) 1–17. <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1685144>.
- [26] M. Eltaher, Ş. Akbaş, Transient response of 2D functionally graded beam structure, *Structural Engineering & Mechanics*. 75 (2020) 357–367. <https://doi.org/10.12989/sem.2020.75.3.357>.

- [27] E.F. Erdurcan, Y. Cunedioğlu, Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Material Coated Aluminum Beam, *AIAA Journal*. 58 (2020) 949–954. <https://doi.org/10.2514/1.J059002>.
- [28] C.I. Le, N.A.T. Le, D.K. Nguyen, Free vibration and buckling of bidirectional functionally graded sandwich beams using an enriched third-order shear deformation beam element, *Composite Structures*. (2020) 113309. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113309>.
- [29] W.-L. Ma, Z.-C. Jiang, K.-Y. Lee, X.-F. Li, A refined beam theory for bending and vibration of functionally graded tube-beams, *Composite Structures*. 236 (2020) 111878. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.111878>.
- [30] F. Rahmani, R. Kamgar, R. Rahgozar, Finite Element Analysis of Functionally Graded Beams using Different Beam Theories, *Civil Engineering Journal*. 6 (2020) 2086–2102. <https://doi.org/10.28991/cej-2020-03091604>.
- [31] M.T. Piovan, S. Domini, J.M. Ramirez, In-plane and out-of-plane dynamics and buckling of functionally graded circular curved beams, *Composite Structures*. 94 (2012) 3194–3206. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.032>.
- [32] J. Fariborz, R.C. Batra, Free vibration of bi-directional functionally graded material circular beams using shear deformation theory employing logarithmic function of radius, *Composite Structures*. 210 (2019) 217–230. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.036>.
- [33] R.M. Jones, *Mechanics of composite materials*, 2nd ed, Taylor & Francis, Philadelphia, PA, 1999.
- [34] V. Yıldırım, Governing equations of initially twisted elastic space rods made of laminated composite materials, *International Journal of Engineering Science*. 37 (1999) 1007–1035. <https://doi.org/10/d384x5>.
- [35] A. Bhimaraddi, K. Chandrashekhara, Some observations on the modeling of laminated composite beams with general lay-ups, *Composite Structures*. 19 (1991) 371–380. <https://doi.org/10/fjj4db>.
- [36] U.N. Aribas, M. Ermiş, N. Eratli, M.H. Omurtag, The static and dynamic analyses of warping included composite exact conical helix by mixed FEM, *Composites Part B: Engineering*. 160 (2019) 285–297. <https://doi.org/10/gft72h>.
- [37] U.N. Aribas, M. Ermiş, A. Kutlu, N. Eratli, M.H. Omurtag, Forced vibration analysis of composite-geometrically exact elliptical cone helices via mixed FEM, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 0 (2020) 1–19. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1824048>.
- [38] C.S. Jog, I.S. Mokashi, A finite element method for the Saint-Venant torsion and bending problems for prismatic beams, *Computers & Structures*. 135 (2014) 62–72. <https://doi.org/10/gc6xzc>.
- [39] M.H. Omurtag, A.Y. Aköz, The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading, *Computers & Structures*. 43 (1992) 325–331. <https://doi.org/10/b644p8>.
- [40] J.T. Oden, J.N. Reddy, *Variational methods in theoretical mechanics*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [41] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *Journal of Engineering Mechanics*. 85 (1959) 67–94.
- [42] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Klaus-Jurgen Bathe, 2006.