



## EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ELİPTİK KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Gökay Aydoğan<sup>1</sup>, Merve Ermis<sup>2</sup>, Umit N. Aribas<sup>3</sup> ve Mehmet H. Omurtag<sup>4</sup>

<sup>1,2</sup>Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli

<sup>3,4</sup>İstanbul Medipol Üniversitesi, İstanbul

### ABSTRACT

Functionally graded materials have wide range of applications in space/aerospace, automotive and biomedical industries due to their thermal resistance properties, high strength, lightness, resistant against corrosion and abrasion. The objective of this study is to compare the natural frequencies of axially functionally graded elliptical beams via one dimensional or brick finite elements of computer based finite element package programs. Functionally graded material has a continuously varying function along the axis of the beam and consist of two-phase composite material. These materials are metal-matrix and ceramic-particle. The effective material properties of the functionally graded materials are determined according to the rule of mixture (Voigt model). Within the scope of the study, finite element solutions are obtained using BEAM188 and SOLID186 elements of ANSYS. The planar elliptical beam with rectangular cross section geometry has two different boundary conditions, namely, either cantilever or fixed at both ends. The effects of different boundary conditions, subtended angles and material variation parameters on the natural frequencies of axially functional graded planar elliptical beams were investigated in detail. Also, the convergence analysis for BEAM188 and SOLID186 elements of ANSYS finite element program are examined in detail.

Keywords: functionally graded material; finite element; free vibration analysis; elliptical beam

### ÖZET

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler sahip oldukları ısı direnç özellikleri, yüksek mukavemet dayanımları, hafiflikleri, korozyona ve aşınmaya karşı olan özellikleri nedeniyle uzay, havacılık, otomotiv ve biyomedikal sanayide geniş kullanım alanlarına sahiptirler. Bu çalışmanın amacı, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kirişlerin serbest titreşim davranışını bilgisayar tabanlı sonlu eleman paket programlarının bir boyutlu veya üç boyutlu katı sonlu elemanı yardımıyla incelemektir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kirişin eksen boyu boyunca sürekli değişen bir fonksiyona sahip olup iki fazlı kompozit malzemeden oluşmaktadır. Bu malzemeler metal-matris ve seramik-parçacıktır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin etkin malzeme özellikleri karışım kuralına (Voigt model) göre belirlenmiştir. Çalışma kapsamında, sonlu eleman çözümleri ANSYS sonlu eleman programının BEAM188 ve SOLID186 elemanları kullanılarak elde edilmiştir. Dikdörtgen kesit geometrisine sahip düzlem eliptik kiriş konsol veya iki ucundan rijit tutulu olmak üzere

iki farklı sınır koşuluna sahiptir. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş düzlem eliptik kirişlerin doğal frekansları üzerinde, farklı sınır koşulları, merkez açıları ve malzeme değişim parametrelerinin etkisi detaylı olarak araştırılmıştır. Aynı zamanda, ANSYS sonlu eleman programının BEAM188 ve SOLID186 yakınsama analizleri de detaylı olarak incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme; sonlu eleman; serbest titreşim analizi; eliptik kiriş

## GİRİŞ

Fonksiyonel dereceli malzemeler optik, elektronik, uzay, havacılık, otomotiv, biyomedikal, enerji ve savunma sanayiinde, nükleer ve kimyasal tesislerde geniş kullanım alanına sahiptir [1-6]. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) istenen doğrultularda sürekli değişen bir fonksiyona sahip iki fazlı kompozit malzemelerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler düşük ısı iletkenliği, yüksek sertlik ve aşınma direncine sahip ve düşük sürtünme katsayısı gibi diğer mükemmel mekanik ve kimyasal özelliklerle üretilmiştir [7]. Bu yeni nesil kompozit malzemelerin yapısal özelliklerinin derecelendirilmiş olması, çeşitli yükleme durumları altında (ör: termo-mekanik yükler) tabakalı kompozit yapılarda malzeme özelliklerinin ani olarak değişmesinden dolayı meydana gelen yüksek gerilme yığılmalarının neden olduğu çatlaklara ve ayrılmalara karşı yapıları daha dirençli hale getirmiştir [8-9]. Eğri eksenli düzlem kirişler mimarlık, inşaat mühendisliği ve makine mühendisliği uygulamalarında yaygın olarak kullanılan yapı elemanlarından [10-13]. Literatür incelendiğinde eksenel FD kirişlerin davranışları ile ilgili çalışmaların büyük çoğunluğunu doğru eksenli çubuklar oluşturmaktadır. Eksenel FD doğru eksenli kirişler/nano-kirişler dinamik davranışını inceleyen çalışmalardan bazıları sıralanacak olursa [14-23]. Literatürde eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eğri eksenli düzlem kirişlerin analizi ilgili çalışmaların sayısı daha azdır. Bu çalışmalardan bazıları sıralanacak olursa; Rajesakaran [24], eksenel FD eğri eksenli kirişlerin statik ve serbest titreşim analizini kayma etkisinin gözetildiği diferansiyel dönüşüm metodu kullanarak incelemiştir. Tsiatas ve Charalampakis [25] dört parametrelili üstel fonksiyon veya beş parametrelili trigonometrik fonksiyon ile tariflenen malzeme dağılımına sahip eksenel FD doğru eksenli ve dairesel düzlem kirişlerin doğal frekansları üzerinden optimizasyon problemini ele almışlardır. Noori ve ark. [26], tamamlayıcı fonksiyon yöntemini kullanarak eksenel FD parabolik kirişlerin serbest titreşim ve zorlanmış titreşim analizini incelemişlerdir. Temel ve Noori [27] değişken kesitli eksenel FD sikloid kirişlerin serbest titreşim ve zorlanmış titreşim analizini kirişteki kayma etkilerini de göz önünde bulundurarak tamamlayıcı fonksiyon yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Lee ve Lee [28], deneme (trial) özdeğer yöntemi ile geliştirilmiş doğrudan integral yöntemini kullanarak eksenel FD dairesel kirişlerin serbest titreşim davranışını incelemişlerdir.

Bu çalışmanın amacı, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kirişlerin serbest titreşim analizini sonlu eleman yöntemini kullanarak incelemektir. Sonlu eleman çözümlerinde ANSYS'in üç boyutlu katı eleman (SOLID186) ve global yapıda bir boyutlu kiriş eleman (BEAM188) [29] kullanılmıştır. Ayrıca, EFD eliptik kirişin doğal frekans değerleri için ANSYS'in üç boyutlu katı eleman ve bir boyutlu kiriş eleman sonuçları üzerinden performans analizi yapılmıştır. Parametrik çalışmada, EFD eliptik kirişin doğal frekansları üzerinden farklı yarıçap oranları, merkez açı değerleri, farklı malzeme dağılım oranları ve farklı sınır koşullarının etkisi detaylı olarak incelenerek özgün örnekler literatüre sunulmuştur.

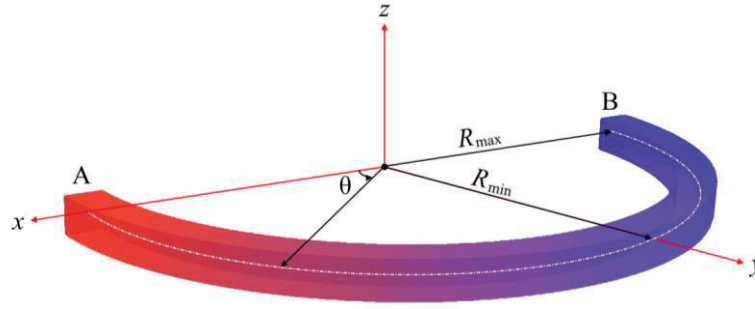
## FORMÜLASYON

Bu bölümde sırasıyla eliptik kirişin geometrisi, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme modeli ve serbest titreşim analizinde kullanılan ANSYS sonlu eleman programında tanımlı elemanlara ait açıklamalara yer verilmiştir.

**Eliptik Kiriş Geometrisi:** Kartezyen koordinat sisteminde tanımlı  $x$ - $y$  düzleminde bulunan düzlem eğrisel kirişe ait konum vektörü ifadesini  $x$  ekseninden itibaren ölçülen  $\theta$  açısı parametre olarak seçilerek,

$$\mathbf{r}(\theta) = \{x(\theta), y(\theta)\} \quad (1)$$

yazılır.



Şekil 1. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kiriş.

Eliptik kirişin (Şekil 1)  $x$ - $y$  düzlemindeki bileşenleri,

$$x(\theta) = R_{\max} \cos \theta, \quad y(\theta) = R_{\min} \sin \theta \quad (2)$$

olmak üzere, burada  $R_{\min} > 0$  ve  $R_{\max} > 0$  sırasıyla minimum ve maksimum yarıçap değerlerini göstermektedir. Eliptik kirişin yay boyu  $s$ 'nin gradyenti olan  $c(\theta)$  (1) deki konum vektörü üstünden tanımlanırsa,

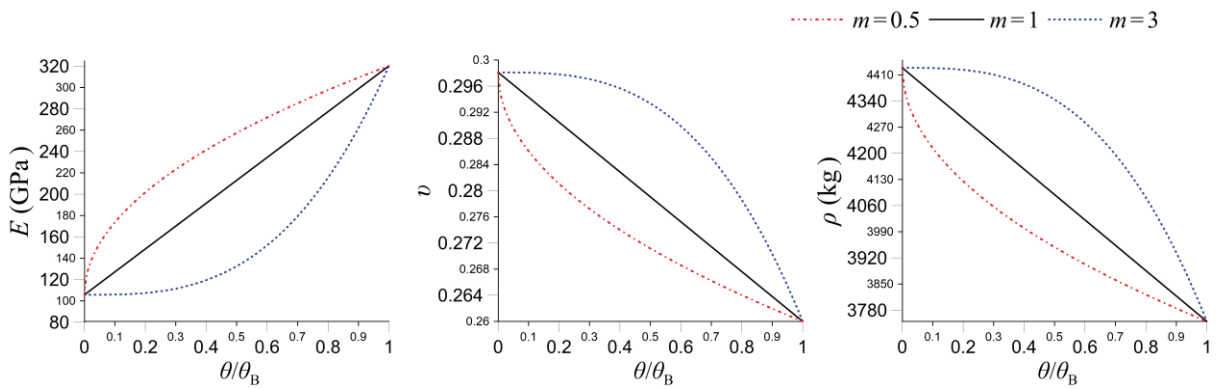
$$c(\theta) = \|\mathbf{r}_{,\theta}\|, \quad ds = c(\theta) d\theta \quad (3)$$

dir. Burada virgülden sonraki alt indis ifadesi  $\theta$  parametresine göre türevi göstermektedir **Error! Reference source not found.** (3) de verilen yay boyu gradyenti  $c(\theta)$  yardımıyla kirişin toplam uzunluğu  $S = \int_0^{\theta_B} c(\theta) d\theta$  formülü ile bulunur.  $\theta_B$  eliptik kirişin merkez açısını göstermektedir (Şekil 1).

**Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş (EFD) Malzeme Modeli:** İki fazlı malzemeden oluşan kompozit kirişte malzeme dağılımı eğrisel kirişin yatay açısı  $\theta$  parametresine bağlı olarak kiriş eksen boyu boyunca fonksiyonel olarak değişmektedir. Kompozit malzemenin etkin malzeme özellikleri karışım kuralına (Voigt model) **Error! Reference source not found.** göre,

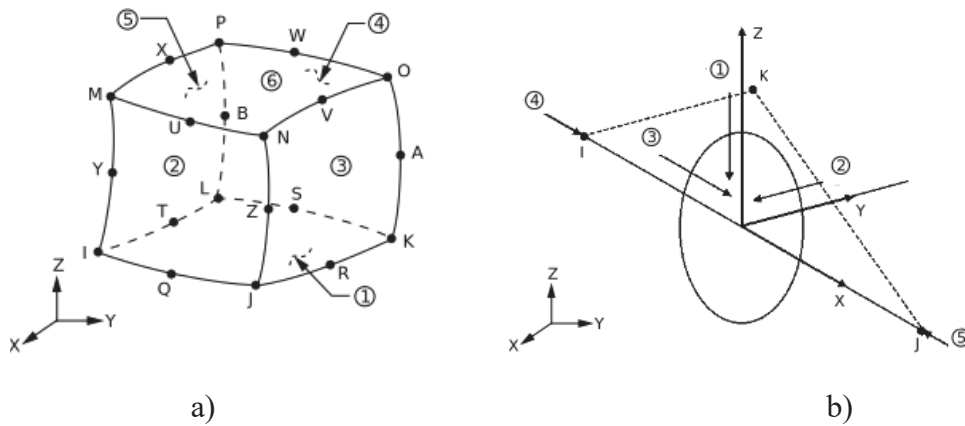
$$\begin{aligned} E(\theta) &= E_A + (E_B - E_A) \left( \frac{\theta}{\theta_B} \right)^m \\ \nu(\theta) &= \nu_A + (\nu_B - \nu_A) \left( \frac{\theta}{\theta_B} \right)^m \\ \rho(\theta) &= \rho_A + (\rho_B - \rho_A) \left( \frac{\theta}{\theta_B} \right)^m \end{aligned} \quad (4)$$

verilebilir. Burada, eğrisel kirişin  $\theta$ 'ya göre etkin malzeme özellikleri ise sırasıyla elastisite modülü ( $E$ ), Poisson oranı ( $\nu$ ) ve yoğunluğu ( $\rho$ ) dur.  $m \geq 0$  malzeme değişim parametresini göstermektedir. Bu çalışma kapsamında iki fazlı kompozit malzeme metal (Ti-6Al-4V) ve seramik ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) malzeme seçilmiştir. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede eğrisel kirişin başlangıç noktasından (A noktası) %100 metal malzeme ile başlarken, en son noktasında (B noktası) ise %100 seramik malzeme ile sonlanmaktadır. Malzeme değişim parametresi  $m = 0$  için tüm çubuk izotrop homojen seramik malzemeden oluşurken,  $m = \infty$  değeri için ise tüm çubuk izotrop homojen metal malzemeden oluşmaktadır. Metal (Ti-6Al-4V) malzemesine ait malzeme özellikleri  $E_A = 105.7 \text{ GPa}$ ,  $\nu_A = 0.2981$  ve  $\rho_A = 4429 \text{ kg/m}^3$ 'tür. Seramik ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) malzemesine ait malzeme özellikleri ise  $E_B = 320.24 \text{ GPa}$ ,  $\nu_B = 0.26$  ve  $\rho_B = 3750 \text{ kg/m}^3$ 'tür. Metal ve seramik malzemelerine ait mekanik malzeme özellikleri (4) numaralı denklemde yerleştirilirse çubuk eksen boyunca etkin malzeme özellikleri elde edilir (Şekil 2).



Şekil 2. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eğrisel kirişin etkin malzeme değerlerinin normalize edilmiş yatay açı parametresi  $\theta / \theta_B$  ye göre değişimi

**Sonlu Eleman Yöntemi:** Bu çalışma, bilgisayar tabanlı sonlu eleman programı olan ANSYS [27] kullanılarak eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) eliptik kirişin serbest titreşim davranışı incelenmiştir.



Şekil 3. ANSYS sonlu eleman programı a) SOLID186 üç boyutlu (3B) 20 adet düğüm noktasına sahip katı eleman (ilgili şekil [29]'dan alınmıştır.) ve b) BEAM188 global yapıda 2 adet düğüm noktasına sahip bir boyutlu kiriş eleman (ilgili şekil [29]'dan alınmıştır.)

Kiriş elemanın modellenmesinde kullanılan ANSYS'in sonlu eleman modelleri ise;

ANSYS SOLID186: Yüksek mertebeden üç boyutlu (3B) ve 20 düğüm noktasına sahip ikinci dereceden yer değiştirme davranışı gösteren katı elemandır (Şekil 3.a). Her bir düğüm noktasında 3 adet serbestlik derecesi bulunur: x, y ve z doğrultularında ötelenmelerdir [29].

ANSYS BEAM188: İnce ve orta derecede yükseklik/uzunluk oranı bulunan kiriş yapılarını analiz etmek amacıyla kullanılır. Timoshenko kiriş teorisi üzerinden kayma deformasyonu etkilerini de hesaba katarak formüle edilmiştir. global yapıda 2 adet düğüm noktasına sahip bir boyutlu kiriş eleman (Şekil 3.b) her bir düğüm noktasında 6 adet serbestlik derecesi bulunur: Bunlardan üçü x, y ve z doğrultularında ötelenmeler olup, diğer üçü ise x, y ve z eksenleri etrafında kesit dönmeleridir [29].

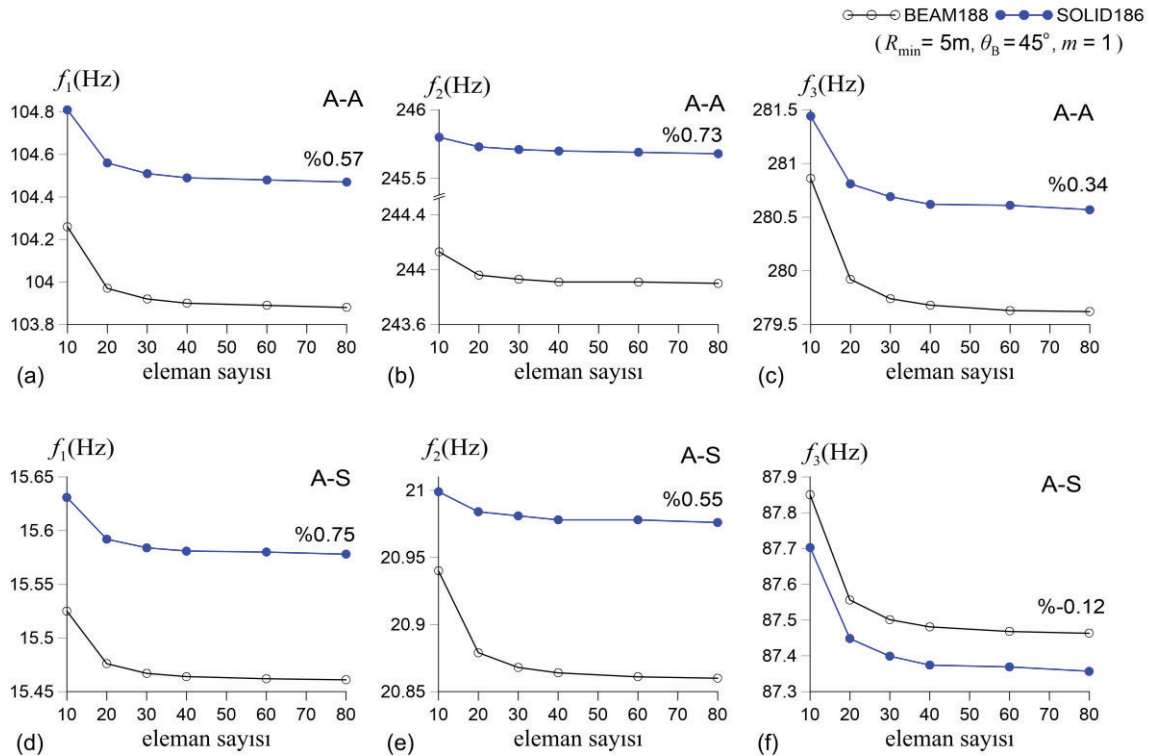
### SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal örnekler kısmında, farklı malzeme değişim parametreleri ( $m$ ), farklı merkez açısı değerleri  $\theta$  ve farklı minimum yarıçap değerleri ( $R_{\min}$ ) için ankastre-ankastre ya da ankastre-serbest sınır şartına sahip eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) eliptik kirişlerin serbest titreşim davranışı ANSYS programı ile incelenmiştir. Sayısal sonuçlar, yakınsama analizi ve parametrik analiz olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. ANSYS çözümlerinde elemandaki malzeme özellikleri eğrisel kirişin iki düğüm noktasındaki malzeme özelliklerinin ortalaması olarak alınmıştır.

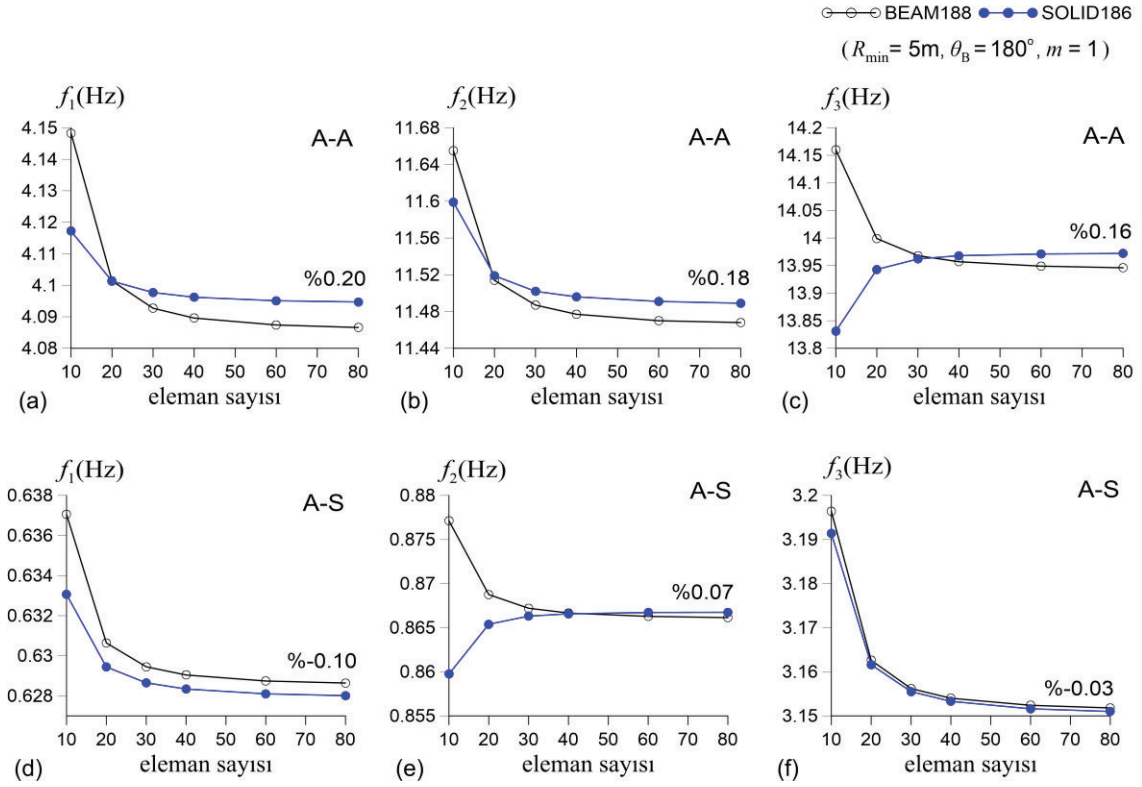
#### Yakınsama Analizi:

Malzeme değişim parametresi ( $m=0.5,1$  ve  $3$ ), farklı minimum yarıçap değerleri ( $R_{\min}=10m, 7.5m$  ve  $5m$ ), farklı merkezi açısı değerleri ( $\theta_B=45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  ve  $180^\circ$ ) farklı sınır koşulları (ankastre-ankastre ve ankastre-serbest) üzerinden incelenmiştir. Tüm örneklerde eliptik kirişin en büyük yarıçap değeri  $R_{\max}=10m$ 'dir. En küçük yarıçap değeri  $R_{\min}=10m$  için dairesel düzlem çubuk elde edilmektedir. Tüm kirişler dikdörtgen kesite sahiptir. Kesit genişliği  $0.48m$ , yüksekliği ise  $0.36m$ 'dir. Yakınsama analizlerinde eğrisel çubuklar sırasıyla 10, 20, 30, 40, 60 ve 80 adet doğru eksenli çubuk eleman üzerinden ayrıklaştırılmış olup ANSYS programında BEAM188 ya da SOLID186 elemanları üzerinden tanımlanarak serbest titreşim analizleri yapılmıştır. Örneğin,  $\theta_B=180^\circ$  ve  $R_{\min}=5m$  için elde edilen çubuk geometrisinin 80 adet doğru eksenli çubuk eleman üzerinden tanımlanan SOLID186 (katı elemanın bir boyutu  $0.06m$ ) ve BEAM188 elemanlarının toplam serbestlik dereceleri sırasıyla 307791 ve 5766'dır. Ayrıca,  $m=1$  ve ankastre-ankastre sınır koşulu için analiz süreleri incelendiğinde SOLID186 ve BEAM188 için sırasıyla 27.469sn ve 1.188sn (Intel® Core™ i7-6700HQ CPU, 2.60 GHz, 12GB RAM) olduğu gözlemlenmiştir. Ele alınan tüm örneklerde 60 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıklaştırılan eğri eksenli çubuğun doğal frekans değerleri ve 80 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıklaştırılan eğri eksenli çubuğun doğal frekans değerlerine göre ANSYS'nin her bir elemanı BEAM188 ve SOLID186 için ayrı ayrı normalize edilmiştir. İlk üç doğal frekans değerleri göz önüne alındığında yüzde farkların mutlak değerce en büyük değerleri SOLID186 ve BEAM188 için %0.058 ve %0.053'dir. Yukarıda bahsi geçen parametreler için BEAM188 ve SOLID186 elemanlarının performansları bazı durumlar için Şekil 4-7 da sunulmuştur. 80 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıklaştırılan eğri eksenli çubukların BEAM 188 eleman üzerinden elde edilen sonuçları SOLID186 eleman üzerinden elde edilen sonuçlarına göre normalize edilerek hesaplanan yüzde farklar Şekil 4-7'da sunulmuştur. Elde edilen sonuçlara göre:

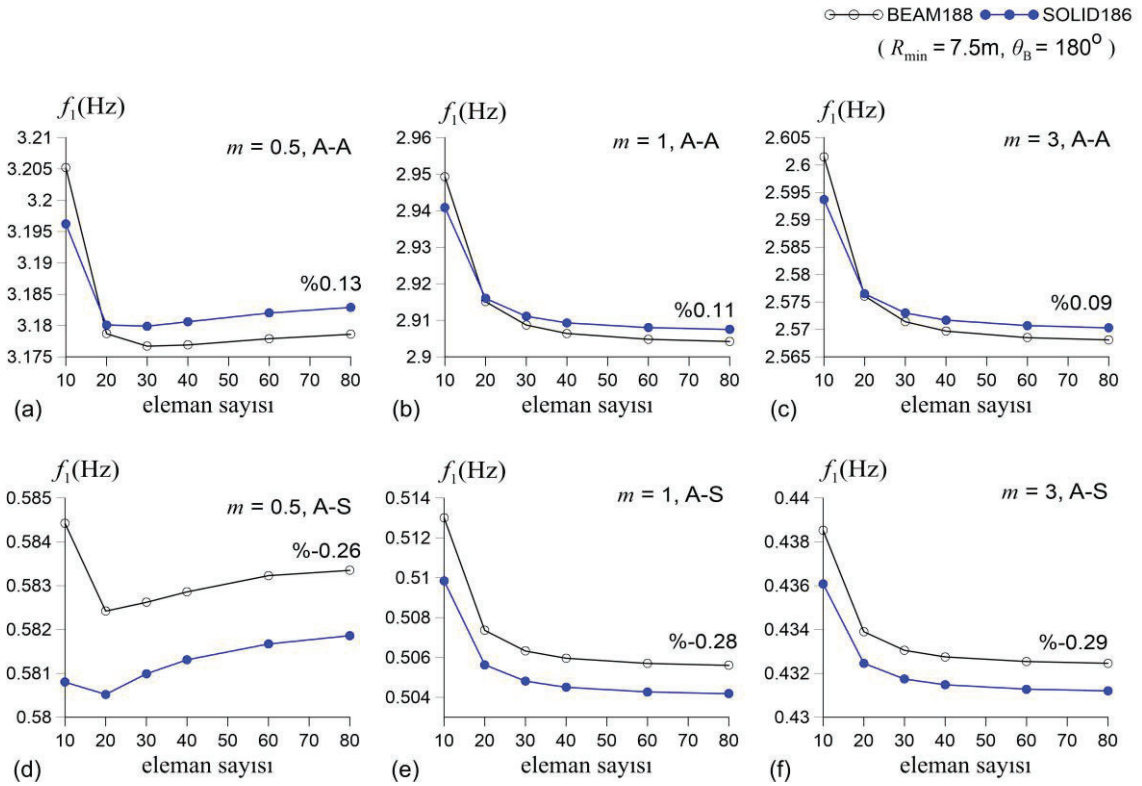
- $R_{\min} = 5m$  ve  $m = 1$  sahip eksenel FD eliptik kirişin ankastre-ankastre (A-A) ve ankastre-serbest (A-S) sınır koşulları için merkez açı değerlerinin  $\theta_B = 45^\circ$  ve  $\theta_B = 180^\circ$  değişimine göre ilk üç doğal frekans değeri için yakınsama analizi sırasıyla Şekil 4 ve 5'te sunulmuştur. Analiz sonuçlarına göre:
  - $\theta_B = 45^\circ$ 'ye ait Şekil 4.c ve e deki (A-A sınır koşulu ve 3. doğal frekans değerleri ile A-S sınır koşulu ve 2. doğal frekans) için yakınsama hızları hariç diğer durumlar için iki tip elemanın yakınsama hızları hemen hemen aynıdır (Şekil 4).
  - $\theta_B = 180^\circ$ 'ye ait Şekil 5.a ve d'de sırasıyla A-A ve A-S sınır şartları için verilen 1. doğal frekans değerlerine ait yakınsama hızları göz önüne alındığında SOLID186 eleman BEAM188 elemana göre daha hızlı yakınsamaktadır. Şekil c ve e'deki (A-A sınır koşulu ve 3. doğal frekans değerleri ile A-S sınır koşulu ve 2. doğal frekans) için SOLID 186 ve BEAM188'in yakınsama hızları hemen hemen aynıdır. Hatta, A-S sınır koşulu için BEAM188 ve SOLID186 10 eleman hariç diğer tüm eleman sonuçlarında üst üste düşmektedir.
- $\theta_B = 180^\circ$ 'ye sahip eksenel FD eliptik kirişin ankastre-ankastre (A-A) ve ankastre-serbest (A-S) sınır koşulları için malzeme gradyenti parametrelerinin ( $m = 0.5, 1$  ve  $3$ ) değişimine göre ilk doğal frekans değeri için yakınsama analizi sırasıyla  $R_{\min} = 7.5m$  ve  $R_{\min} = 10m$  Şekil 6 ve 7'de sunulmuştur. Analiz sonuçlarına göre, malzeme değişim parametresinin değişimi ( $m = 0.5, 1$  ve  $3$ ) SOLID186 ve BEAM188'in yakınsama hızlarında hemen hemen bir farklılığa neden olmamıştır (Şekil 6-7).



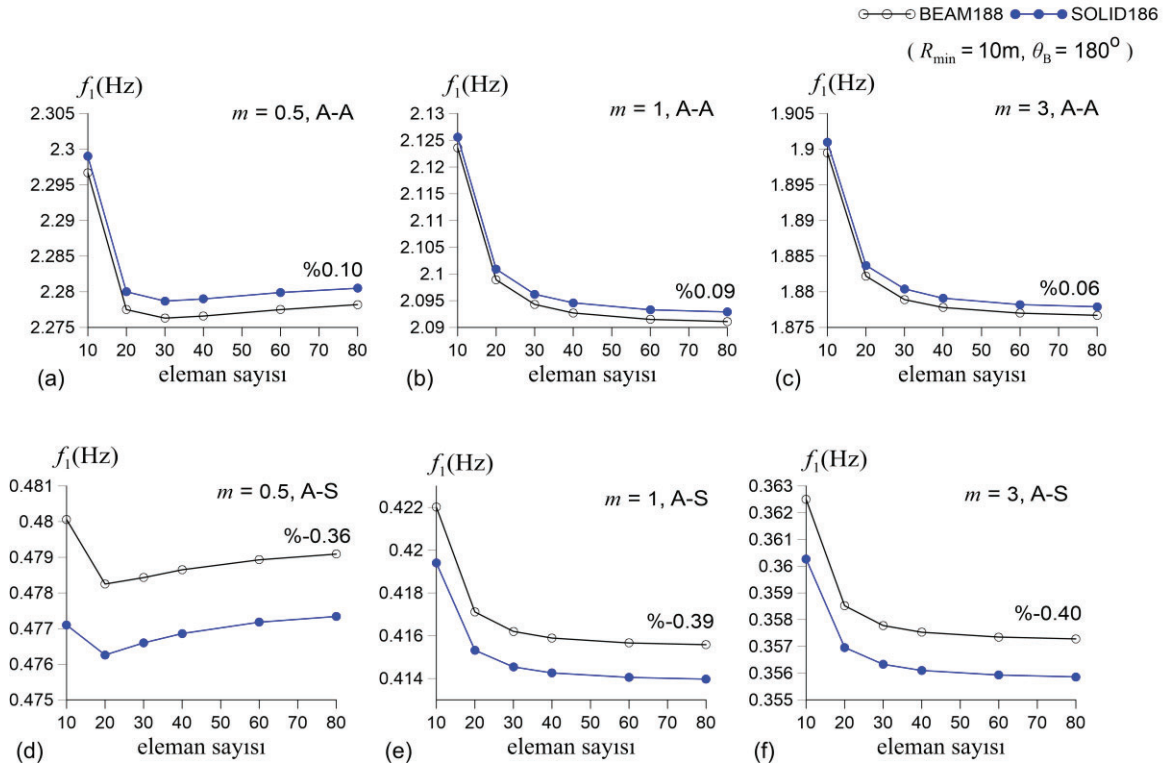
Şekil 4. Merkez açısı  $\theta_B = 45^\circ$  olan EFD eliptik kirişin ilk üç doğal frekans değeri  $f$  için yakınsama analizi ( $R_{\min} = 5m$ ,  $m = 1$ )



Şekil 5. Merkez açısı  $\theta_B = 180^\circ$  EFD eliptik kirişin ilk üç doğal frekans değeri  $f$  için yakınsama analizi (  $R_{\min} = 5\text{m}$ ,  $m = 1$  )



Şekil 6. Minimum yarıçap değeri  $R_{\min} = 7.5\text{m}$  olan EFD eliptik kirişin birinci doğal frekans değeri  $f$  için yakınsama analizi (  $\theta_B = 180^\circ$ ,  $m = 0.5, 1, 3$  )



Şekil 7. Minimum yarıçap değeri  $R_{\min} = 10m$  olan EFD dairesel kirişin birinci doğal frekans değeri  $f$  için yakınsama analizi ( $\theta_B = 180^\circ$ ,  $m = 0.5, 1, 3$ )

### Parametrik Analiz:

Malzeme gradyenti parametresinin ( $m$ ) değişiminin kirişin doğal frekansı üzerindeki etkisini görebilmek için  $m = 0.5, 1$  ve  $3$  malzeme parametrelerinin yanı sıra, izotrop homojen seramik malzemesi ve metal malzemesine karşılık gelen  $m = 0$  ve  $m = \infty$  değişim parametreleri de göz önüne alınmıştır. Malzeme değişim parametresinin etkisi yakınsama analizi kısmında verilen farklı sınır koşulları (ankastre-ankastre ve ankastre-serbest), farklı minimum yarıçap değerleri ( $R_{\min} = 10m, 7.5m$  ve  $5m$ ) ile farklı merkezi açı değerleri ( $\theta_B = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  ve  $180^\circ$ ) üzerinden incelenmiştir. En küçük yarıçap değeri  $R_{\min} = 10m, 7.5m$  ve  $5m$  için elde edilen sonuçlar sırasıyla ankastre-serbest sınır koşulu için Çizelge 1-3 ve ankastre-ankastre sınır koşulu için Çizelge 4-6 arasında sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa:

**Malzeme gradyenti parametresi ( $m$ ):** Malzeme değişimi parametre değerleri  $m = 0, 0.5, 1$  ve  $3$  (Çizelge 1-6) sahip eliptik kirişlerin birinci doğal frekans değerleri malzeme değişim parametre değeri  $m = \infty$  olan eliptik kirişin sonuçlarına göre her bir sınır koşulu, merkezi açı ( $\theta$ ) değeri ve en küçük yarıçap ( $R_{\min}$ ) değerleri için  $\%fark = (1 - f_{m=\infty} / f_{m=i}) \times 100$  ( $i = 0, 0.5, 1$  ve  $3$ ) formülü üzerinden normalize edilerek yüzde farklar hesaplanmıştır. Şöyle ki;

- Ankastre-serbest sınır koşulu için,
  - $R_{\min} = 10m$ : malzeme değişim parametresi  $m = 0, 0.5, 1$  ve  $3$  ait artış yüzdeleri sırasıyla  $\theta_B = 45^\circ$  için %89.4, %42.0, %23.5, %7.1;  $\theta_B = 90^\circ$  için %89.1, %42.0, %23.5, %6.7;  $\theta_B = 135^\circ$  için %90.9, %43.6, %23.6, %7.3;  $\theta_B = 180^\circ$  için ise %90.9, %45.5, %24.2, %9.1'dir.

- $R_{\min} = 7.5\text{m}$ : malzeme değişim parametresi  $m = 0, 0.5, 1$  ve  $3$  ait artış yüzdeleri sırasıyla  $\theta_B = 45^\circ$  için %89.5, %43.1, %24.4, %7.6;  $\theta_B = 90^\circ$  için %90.1, %44.7, %25.7, %7.9;  $\theta_B = 135^\circ$  için %93.8, %44.6, %26.2, %7.7;  $\theta_B = 180^\circ$  için ise %92.5; %45.0, %25.0, %7.5'dir.
- $R_{\min} = 5\text{m}$ : malzeme değişim parametresi  $m = 0, 0.5, 1$  ve  $3$  ait artış yüzdeleri sırasıyla  $\theta_B = 45^\circ$  için %89.9, %45.5, %26.8, %8.7;  $\theta_B = 90^\circ$  için %90.3, %47.7, %28.7, %9.2;  $\theta_B = 135^\circ$  için %90.8, %48.7, %28.9, %9.2;  $\theta_B = 180^\circ$  için %90.0, %46.0, %26.0, %6.0'dır.
- Ankastre-ankastre sınır koşulu için,
  - $R_{\min} = 10\text{m}$ : malzeme değişim parametresi  $m = 0, 0.5, 1$  ve  $3$  ait artış yüzdeleri sırasıyla  $\theta_B = 45^\circ$  için %89.3, %56.4, %42.3, %23.4;  $\theta_B = 90^\circ$  için %96.5, %61.5, %47.5, %29.5;  $\theta_B = 135^\circ$  için %89.3, %55.0, %41.8, %26.1;  $\theta_B = 180^\circ$  için %88.5, %54.1, %41.2, %27.0'dir.
  - $R_{\min} = 7.5\text{m}$ : malzeme değişim parametresi  $m = 0, 0.5, 1$  ve  $3$  ait artış yüzdeleri sırasıyla  $\theta_B = 45^\circ$  için %89.2, %57.0, %43.0, %24.4;  $\theta_B = 90^\circ$  için %89.2, %56.7, %43.3, %25.6;  $\theta_B = 135^\circ$  için %89.1, %55.9, %42.5, %25.4;  $\theta_B = 180^\circ$  için %90.2, %55.9, %42.6, %26.0'dır.
  - $R_{\min} = 5\text{m}$ : malzeme değişim parametresi  $m = 0, 0.5, 1$  ve  $3$  ait artış yüzdeleri sırasıyla  $\theta_B = 45^\circ$  için %89.3, %58.2, %44.5, %26.0;  $\theta_B = 90^\circ$  için %89.3, %59.3, %45.9, %27.1;  $\theta_B = 135^\circ$  için %89.5, %58.9, %45.1, %25.8;  $\theta_B = 180^\circ$  için %89.5, %57.1, %42.5, %23.3'tür.

**Çizelge 1.** En küçük yarıçap değeri  $R_{\min} = 10\text{m}$  olan dairesel kirişin ankastre-serbest sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), metal (Ti-6Al-4V).

| Sınır Koşulu     | Merkez Açılar( $\theta_B$ ) | Seramik ( $m = 0$ ) | Seramik-Metal |         |         | Metal ( $m = \infty$ ) |
|------------------|-----------------------------|---------------------|---------------|---------|---------|------------------------|
|                  |                             |                     | $m = 0.5$     | $m = 1$ | $m = 3$ |                        |
| ankastre-serbest | $45^\circ$                  | 8.79                | 6.59          | 5.73    | 4.97    | 4.64                   |
|                  | $90^\circ$                  | 2.25                | 1.69          | 1.47    | 1.27    | 1.19                   |
|                  | $135^\circ$                 | 1.05                | 0.79          | 0.68    | 0.59    | 0.55                   |
|                  | $180^\circ$                 | 0.63                | 0.48          | 0.41    | 0.36    | 0.33                   |

**Çizelge 2.** En küçük yarıçap değeri  $R_{\min} = 7.5\text{m}$  olan eliptik kirişin ankastre-serbest sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), metal (Ti-6Al-4V).

| Sınır Koşulu     | Merkez Açılar( $\theta_B$ ) | Seramik ( $m = 0$ ) | Seramik-Metal |         |         | Metal ( $m = \infty$ ) |
|------------------|-----------------------------|---------------------|---------------|---------|---------|------------------------|
|                  |                             |                     | $m = 0.5$     | $m = 1$ | $m = 3$ |                        |
| ankastre-serbest | $45^\circ$                  | 13.76               | 10.39         | 9.03    | 7.81    | 7.26                   |
|                  | $90^\circ$                  | 2.89                | 2.20          | 1.91    | 1.64    | 1.52                   |
|                  | $135^\circ$                 | 1.26                | 0.94          | 0.82    | 0.70    | 0.65                   |
|                  | $180^\circ$                 | 0.77                | 0.58          | 0.50    | 0.43    | 0.40                   |

**Çizelge 3.** En küçük yarıçap değeri  $R_{\min} = 5\text{m}$  olan dairesel kirişin ankastre-serbest sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), metal (Ti-6Al-4V).

| Sınır Koşulu     | Merkez Açılar ( $\theta_B$ ) | Seramik ( $m = 0$ ) | Seramik-Metal |         |         | Metal ( $m = \infty$ ) |
|------------------|------------------------------|---------------------|---------------|---------|---------|------------------------|
|                  |                              |                     | $m = 0.5$     | $m = 1$ | $m = 3$ |                        |
| ankastre-serbest | 45°                          | 23.34               | 17.88         | 15.58   | 13.36   | 12.29                  |
|                  | 90°                          | 3.71                | 2.88          | 2.51    | 2.13    | 1.95                   |
|                  | 135°                         | 1.45                | 1.13          | 0.98    | 0.83    | 0.76                   |
|                  | 180°                         | 0.95                | 0.73          | 0.63    | 0.53    | 0.50                   |

**Çizelge 4.** En küçük yarıçap değeri  $R_{\min} = 10\text{m}$  olan dairesel kirişin ankastre-ankastre sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), metal (Ti-6Al-4V).

| Sınır Koşulu      | Merkez Açılar ( $\theta_B$ ) | Seramik ( $m = 0$ ) | Seramik-Metal |         |         | Metal ( $m = \infty$ ) |
|-------------------|------------------------------|---------------------|---------------|---------|---------|------------------------|
|                   |                              |                     | $m = 0.5$     | $m = 1$ | $m = 3$ |                        |
| ankastre-ankastre | 45°                          | 53.64               | 44.32         | 40.32   | 34.98   | 28.34                  |
|                   | 90°                          | 12.77               | 10.50         | 9.59    | 8.42    | 6.5                    |
|                   | 135°                         | 5.30                | 4.34          | 3.97    | 3.53    | 2.80                   |
|                   | 180°                         | 2.79                | 2.28          | 2.09    | 1.88    | 1.48                   |

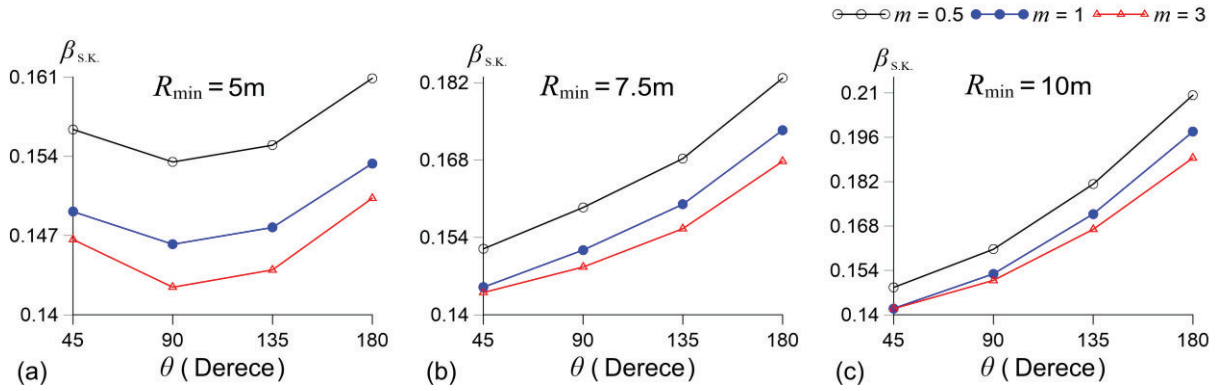
**Çizelge 5.** En küçük yarıçap değeri  $R_{\min} = 7.5\text{m}$  olan dairesel kirişin ankastre-ankastre sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), metal (Ti-6Al-4V).

| Sınır Koşulu      | Merkez Açılar ( $\theta_B$ ) | Seramik ( $m = 0$ ) | Seramik-Metal |         |         | Metal ( $m = \infty$ ) |
|-------------------|------------------------------|---------------------|---------------|---------|---------|------------------------|
|                   |                              |                     | $m = 0.5$     | $m = 1$ | $m = 3$ |                        |
| ankastre-ankastre | 45°                          | 82.43               | 68.37         | 62.31   | 54.20   | 43.56                  |
|                   | 90°                          | 16.65               | 13.79         | 12.61   | 11.05   | 8.80                   |
|                   | 135°                         | 6.77                | 5.58          | 5.10    | 4.49    | 3.58                   |
|                   | 180°                         | 3.88                | 3.18          | 2.91    | 2.57    | 2.04                   |

**Çizelge 6.** En küçük yarıçap değeri  $R_{\min} = 5\text{m}$  olan eliptik kirişin ankastre-ankastre sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), metal (Ti-6Al-4V).

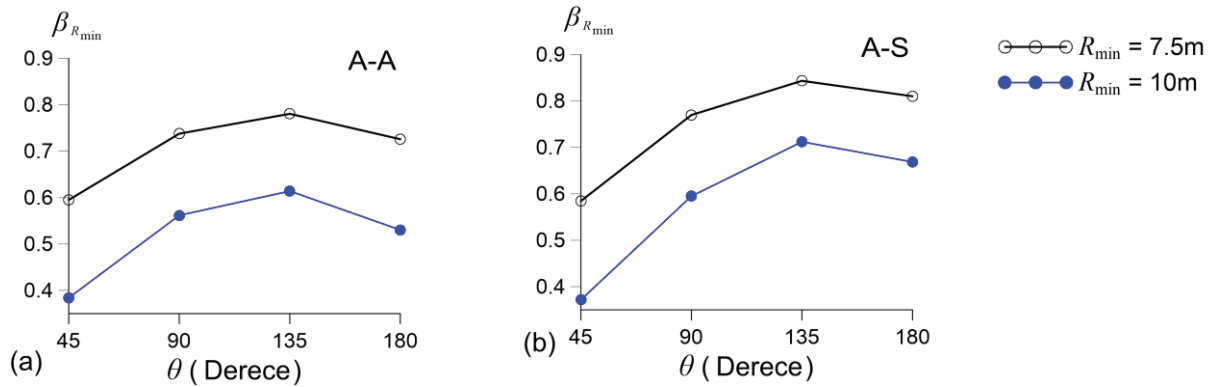
| Sınır Koşulu      | Merkez Açılar ( $\theta_B$ ) | Seramik ( $m = 0$ ) | Seramik-Metal |         |         | Metal ( $m = \infty$ ) |
|-------------------|------------------------------|---------------------|---------------|---------|---------|------------------------|
|                   |                              |                     | $m = 0.5$     | $m = 1$ | $m = 3$ |                        |
| ankastre-ankastre | 45°                          | 136.88              | 114.35        | 104.47  | 91.09   | 72.29                  |
|                   | 90°                          | 22.32               | 18.78         | 17.20   | 14.99   | 11.79                  |
|                   | 135°                         | 8.66                | 7.26          | 6.63    | 5.75    | 4.57                   |
|                   | 180°                         | 5.44                | 4.51          | 4.09    | 3.54    | 2.87                   |

**Sınır Şartı:** Sınır koşulunun etkisi ankastre-ankastre (A-A) olan eliptik kirişin birinci doğal frekans değeri ankastre-serbest (A-S) olan eliptik kirişin sonuçlarına göre her bir merkezi açı ( $\theta$ ) ve en küçük yarıçap ( $R_{\min}$ ) değerleri ile malzeme değişim parametreleri  $m = 0.5, 1$  ve  $3$  için  $\beta_{S.K.} = f_{A-A} / f_{A-S}$  formülü üzerinden normalize edilerek oranlar Şekil 8 de verilmiştir.



Şekil 8. Sınır koşulunun EFD kirişin birinci doğal frekans değerine etkisi ( $\beta_{S.K.} = f_{A-A} / f_{A-S}$ ).

**En Küçük Yarıçap Değeri ( $R_{\min}$ ):** En küçük yarıçap değerleri  $R_{\min} = 10m, 7.5m$  sahip olan EFD düzlem eğrisel kirişin birinci doğal frekans değerleri en küçük yarıçap değeri  $R_{\min} = 5m$  olan EFD eliptik kirişin sonuçlarına göre her bir merkezi açı ( $\theta_B$ ) değeri ve sınır koşulu için  $\beta_{R_{\min}} = f_i / f_{R_{\min}=5m}$  ( $i: R_{\min} = 10m, R_{\min} = 7.5m$ ) formülü üzerinden normalize edilerek elde edilen oranlar malzeme değişim parametresi  $m = 3$  için Şekil 9’da verilmiştir.



Şekil 9. En küçük yarıçap  $R_{\min}$  değerinin EFD kirişin birinci doğal frekans değerine etkisi

$$\beta_{R_{\min}} = f_i / f_{R_{\min}=5m} \quad (i: R_{\min} = 10m, R_{\min} = 7.5m)$$

## SONUÇLAR

Farklı sınır koşullarının, malzeme değişim parametreleri ile eliptik kirişin farklı merkez açıları ve minimum yarıçap değerlerinin eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kirişlerin doğal frekansları üzerindeki etkisi bilgisayar tabanlı sonlu eleman paket programları (ANSYS’in üç boyutlu katı eleman (SOLID186) ve bir boyutlu kiriş eleman BEAM188) ile detaylı olarak incelenmiştir. Bu çalışma kapsamında seçilen parametreler göz önüne alındığında elde edilen analiz sonuçları özetlenecek olursa:

- Sınır şartı etkisi  $\beta_{S.K.} = f_{A-A} / f_{A-S}$  oranı üzerinden farklı  $R_{\min}$ ,  $\theta_B$  ve  $m$  parametrelerine göre incelendiğinde (Şekil 8),
  - Her bir  $R_{\min}$  ve  $m$  parametresi sabit tutulup,  $\beta_{S.K.}$  oranının değişimi farklı  $\theta_B$  değerlerine göre incelendiğinde bu oranın aldığı en büyük ve en küçük değer arasındaki farka göre sıralama yapılırsa en büyük fark  $R_{\min} = 10\text{m}$  ve en küçük fark ise  $R_{\min} = 5\text{m}$  için elde edilir.
  - $\beta_{S.K.}$  oranı, en büyük değerini  $\beta_{S.K.}^{\max} = 0.209$  olarak  $R_{\min} = 10\text{m}$ ,  $\theta_B = 180^\circ$  ve  $m = 0.5$  durumu için alırken; en küçük değerini ise  $\beta_{S.K.}^{\min} = 0.1419$  olarak  $R_{\min} = 10\text{m}$ ,  $\theta_B = 45^\circ$  ve  $m = 3$  durumu için almaktadır.
- En küçük yarıçap değeri etkisi  $\beta_{R_{\min}}$  oranı üzerinden malzeme değişim parametresi  $m = 3$  için incelendiğinde (Şekil 9),
  - Her bir  $R_{\min}$  değeri ve sınır koşulu sabit tutulup,  $\beta_{R_{\min}}$  oranının değişimi farklı  $\theta_B$  değerlerine göre incelendiğinde bu oran en küçük ve en büyük değerlerini sırasıyla merkez açısı  $\theta_B = 45^\circ$  ve  $\theta_B = 135^\circ$  'de almaktadır.
  - $\beta_{R_{\min}}$  oranı, en büyük değerini  $\beta_{R_{\min}}^{\max} = 0.843$  olarak  $R_{\min} = 7.5\text{m}$ ,  $\theta_B = 135^\circ$  ve ankastre-serbest sınır koşulu durumu için alırken; en küçük değerini ise  $\beta_{R_{\min}}^{\min} = 0.372$  olarak  $R_{\min} = 10\text{m}$ ,  $\theta_B = 45^\circ$  ve ankastre-serbest sınır koşulu durumu için almaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] E. S. Chin, Army focused research team on functionally graded armor composites. *Materials Science and Engineering: A*. 259(2) (1999) 155-161. doi:10.1016/S0921-5093(98)00883-1.
- [2] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber & K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering: A*. 362(1-2) (2003) 40-60. doi:10.1016/S0921-5093(03)00580-X.
- [3] Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki & R. G. Ford, *Functionally graded materials: design, processing and applications* (Vol. 5). Springer Science & Business Media. 2013.
- [4] S. Kumar, K. M. Reddy, A. Kumar, & G. R. Devi, Development and characterization of polymer–ceramic continuous fiber reinforced functionally graded composites for aerospace application. *Aerospace Science and Technology*. 26(1) (2013) 185-191. doi: 10.1016/j.ast.2012.04.002.
- [5] C. Zhang, F. Chen, Z. Huang, M. Jia, G. Chen, Y. Ye, Y. Lin, W. Liu, B. Chen, Q. Shen L. Zhang, E. J. Lavernia, Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Materials Science and Engineering: A*. 764 (2019) 138209. doi: 10.1016/j.msea.2019.138209.
- [6] K.M. Liew, Z. Pan, L.W. Zhang, The recent progress of functionally graded CNT reinforced composites and structures. *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 63 (2020) 234601. doi:10.1007/s11433-019-1457-2.

- [7] A. Avey & M. Süzer, Karışık sınır koşulları altında fonksiyonel dereceli silindirik kabukların titreşim analizi, *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*. 8(3) (2019) 1-15. doi:10.28948/ngumuh.617259.
- [8] M. T. Piovan, S. Domini & J. M. Ramirez, In-plane and out-of-plane dynamics and buckling of functionally graded circular curved beams. *Composite Structures*. 94(11) (2012) 3194-3206. doi:10.1016/j.compstruct.2012.04.032.
- [9] K. Swaminathan, D. T. Naveenkumar, A. M. Zenkour & E. Carrera, Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review. *Composite Structures*. 120 (2015) 10-31. doi:10.1016/j.compstruct.2014.09.070.
- [10] C. H. Norris, J. B. Wilbur, Ş. Utku, *Elementary structural analysis*. McGraw-HILL. 1977.
- [11] G. Prathap, The curved beam/deep arch/finite ring element revisited. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 21(3) (1985) 389-407. doi:10.1002/nme.1620210302.
- [12] P. Chidamparam, & A. W. Leissa, Vibrations of planar curved beams, rings, and arches. *ASME. Appl. Mech. Rev.* 46(9) (1993) 467-483. doi:10.1115/1.3120374.
- [13] A. Cazzani, M. Malagù & E. Turco, Isogeometric analysis of plane-curved beams. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 21(5) (2016) 562-577. doi:10.1177/1081286514531265.
- [14] M. Aydogdu, Semi-inverse method for vibration and buckling of axially functionally graded beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 27(7) (2008) 683-691. doi:10.1177/0731684407081369.
- [15] M. Şimşek, T. Kocatürk & Ş. D. Akbaş, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Composite Structures*. 94(8) (2012) 2358-2364. doi:10.1016/j.compstruct.2012.03.020.
- [16] E. Babilio, Dynamics of an axially functionally graded beam under axial load. *The European Physical Journal Special Topics*. 222(7) (2013) 1519-1539. doi:10.1140/epjst/e2013-01942-8.
- [17] N. Shafiei, M. Kazemi & M. Ghadiri, Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams. *International Journal of Engineering Science*. 102 (2016) 12-26. doi:10.1016/j.ijengsci.2016.02.007.
- [18] M. Azimi, S. S. Mirjavadi, N. Shafiei & A. M. S. Hamouda, Thermo-mechanical vibration of rotating axially functionally graded nonlocal Timoshenko beam. *Applied Physics A*. 123(1) (2017) 104. doi:10.1007/s00339-016-0712-5.
- [19] X. Li, L. Li, Y. Hu, Z. Ding, & W. Deng, Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory. *Composite Structures*. 165 (2017) 250-265. doi:10.1016/j.compstruct.2017.01.032.
- [20] M. H. Ghayesh, Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded shear-deformable tapered beams. *Applied Mathematical Modelling*. 59 (2018) 583-596. doi:10.1016/j.apm.2018.02.017.
- [21] S. Zheng, D. Chen & H. Wang, Size dependent nonlinear free vibration of axially functionally graded tapered microbeams using finite element method. *Thin-Walled Structures*. 139 (2019) 46-52. doi:10.1016/j.tws.2019.02.033.
- [22] M. Ermis, U. N. Aribas, A. Kutlu, N. Eratlı, & M. H. Omurtag, Forced vibration analysis of axially FG straight beams by mixed FEM: IV. *Eurasian Conference on Civil and Environmental Engineering*, İstanbul, Türkiye, 2019: s. 894-899.

- [23] U. N. Aribas, M. Ermis, A. Kutlu, N. Eratli & M. H. Omurtag, Elastically Damped Transient Response of Axially FG Straight Beams: *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 4, Rome, Italy 2019: s.19-25.
- [24] S. Rajasekaran, Analysis of curved beams using a new differential transformation based curved beam element. *Meccanica* 49(4) (2014) 863-886. doi:10.1007/s11012-013-9835-3
- [25] G. C. Tsiatas, & A. E. Charalampakis, Optimizing the natural frequencies of axially functionally graded beams and arches. *Composite Structures*. 160 (2017) 256-266. doi:10.1016/j.compstruct.2016.10.057.
- [26] A. R. Noori, T. A. Aslan, & B. Temel, An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section. *Composite Structures*. 200 (2018) 701-710. doi:10.1016/j.compstruct.2018.05.077.
- [27] B. Temel, & A. R. Noori, Out-of-plane vibrations of shear-deformable AFG cycloidal beams with variable cross section. *Applied Acoustics*. 155 (2019) 84-96. doi:10.1016/j.apacoust.2019.05.010.
- [28] J. K. Lee, & B. K. Lee, In-plane free vibration of uniform circular arches made of axially functionally graded materials. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 19(08) (2019) 1950084. doi:10.1142/S0219455419500846.
- [29] Ansys® Academic Research Mechanical, Mechanical APDL Release 2021 R1, Element Reference, ANSYS, Inc.
- [30] M. Ermis & M. H. Omurtag, Static and dynamic analysis of conical helices based on exact geometry via mixed FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*. 131 (2017) 296-304. doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.07.010.
- [31] B. Karami, D. Shahsavari, M. Janghorban & L. Li, Influence of homogenization schemes on vibration of functionally graded curved microbeams. *Composite Structures*. 216 (2019) 67-79. doi:10.1016/j.compstruct.2019.02.089.