



EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ELİPTİK KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

Oğuzhan Kır¹, Merve Ermis², Umit N. Aribas³ ve Mehmet H. Omurtag⁴

^{1,2}Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli

^{3,4}İstanbul Medipol Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

Functionally graded materials have wide range of applications in space/aerospace, automotive and biomedical industries due to their lightness, high strength, thermal resistance properties, resistant against corrosion and abrasion. The objective of this study is to compare the static responses obtained by one dimensional and brick finite elements of computer based finite element package programs. Functionally graded material has a continuously varying function along the axis of the beam and consist of two-phase composite material. These materials are metal-matrix and ceramic-particle. The effective material properties of the functionally graded materials are determined according to the rule of mixture (Voigt model). Within the scope of the study, finite element solutions are obtained using BEAM188 and SOLID186 elements of ANSYS. The planar elliptical beam with rectangular cross section geometry has two different boundary conditions, namely, either cantilever or fixed at both ends. The effects of different boundary conditions, subtended angles and material variation parameters on the static analysis of axially functionally graded elliptical beams under uniformly vertical distributed load are investigated over the vertical displacement and support reactions in detail. Also, the convergence analysis for BEAM188 and SOLID186 elements of ANSYS finite element program are examined in detail.

Keywords: functionally graded material; finite element; static analysis; elliptical beam

ÖZET

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler hafiflikleri, yüksek mukavemet dayanımları, sahip oldukları ısı direnç özellikleri, korozyona ve aşınmaya karşı olan özellikleri nedeniyle uzay, havacılık, otomotiv ve biyomedikal sanayide geniş kullanım alanlarına sahiptirler. Bu çalışmanın amacı, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kirişlerin statik davranışını bilgisayar tabanlı sonlu eleman paket programlarının bir boyutlu veya üç boyutlu-katı sonlu elemanı yardımıyla incelemektir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kirişin ekseni boyunca sürekli değişen bir fonksiyona sahip olup iki fazlı kompozit malzemeden oluşmaktadır. Bu malzemeler metal-matris ve seramik-parçacaktır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin etkin malzeme özellikleri karışım kuralına (Voigt model) göre belirlenmiştir. Çalışma kapsamında, sonlu eleman çözümleri ANSYS sonlu eleman programının BEAM188 ve SOLID186 elemanları kullanılarak elde edilmiştir. Dikdörtgen kesit geometrisine sahip düzlem eliptik kiriş konsol veya iki ucundan rijit tutulu olmak üzere iki farklı sınır koşuluna sahiptir. Düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki eksenel fonksiyonel

derecelendirilmiş düzlem eliptik kirişlerin statik analizi yer değiştirmeler, mesnet tepkileri üzerinden farklı sınır koşulları, merkez açıları ve malzeme değişim parametreleri için detaylı olarak araştırılmıştır. Aynı zamanda, ANSYS sonlu eleman programının BEAM188 ve SOLID186 yakınsama analizleri de detaylı olarak incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme; sonlu eleman; statik analiz; eliptik kiriş

GİRİŞ

Fonksiyonel dereceli malzemeler diş implantı, yapay deri, askeri zırh, silah ve araç tasarımı, optik lens, roket motoru parçaları, uzay aracı gövdesi yapımı ve nükleer reaktör parçaları tasarımı vb. uygulamalarda yaygın olarak kullanıldığından, son yıllarda bu malzemeler üzerinde çalışmalar oldukça artmıştır. Gelişen teknolojinin ve yürütülen araştırmalar sonucu bu malzemelerin elektronik, uzay, havacılık, biyomedikal, otomotiv, enerji ve savunma sanayiinde kullanım alanları genişlemiştir [1-6]. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) istenen doğrultularda sürekli değişen bir fonksiyona sahip iki fazlı kompozit malzemelerdir. Tabakalı kompozit malzemelerde, malzeme özelliklerinin ani olarak değişmesi, çeşitli yükler (ör: termal ve mekanik yükler) uygulandığında yüksek gerilme yığılmaları oluşturarak, katmanlar arasında istenmeyen ayrılmalar ve çatlaklar oluşturabilmektedir. Malzeme özelliklerinin değişiminin sürekliliği, yapının karakteristik özelliklerindeki homojenliği arttırdığından dolayı, katmanlardaki süreksizlikten doğan sorunlara yapıyı dirençli hale getirmiştir [7-9]. Eğri eksenli kirişler yükleri aktarmada doğru eksenli kirişlere göre daha etkilidir [10]. Bu nedenle, eğri eksenli kirişler, köprüler, makine parçaları, uzay ve hava araçları gibi alanlarda yaygın kullanıma sahiptir [11-15]. Literatür incelendiğinde eksenel FD kirişlerin yapısal davranışını inceleyen çalışmaların çoğu dinamik analiz ile ilgilidir. Bu çalışmalardan bazıları; eksenel FD doğru eksenli kiriş/nano kirişler için [16-24] ve EFD eğri eksenli kirişler için [25-29] olarak sıralanabilir. EFD kirişlerin statik analiz ile ilgili çalışmaların sayısı ise daha azdır. Bu çalışmalardan bazılarını özetleyecek olursak: Shahba ve ark. [30], değişken kesite sahip eksenel FD doğru eksenli Euler-Bernoulli kirişlerinin statik davranışının yanı sıra stabilite ve serbest titreşim davranışını sonlu elemanlar yöntemi kullanarak parametrik bir çalışma üzerinden detaylı olarak incelemişlerdir. Li ve ark. [31] sonlu eleman yöntemini kullanarak, değişken kesite sahip çubuk eksenli veya kalınlığı boyunca FD doğru eksenli kirişlerin statik ve serbest titreşim analizini çalışmışlardır. Literatürde eğri eksenli eksenel FD kirişlerin statik davranışını inceleyen çalışma sayısı oldukça sınırlı sayıdadır. Rajesakaran [32], değişken kesitli eksenel FD eğri eksenli kirişlerin statik analizini diferansiyel dönüşüm eleman yöntemi kullanarak incelemiştir.

Bu çalışmanın amacı, eksenel FD eliptik kirişlerin statik analizini sonlu eleman yöntemini kullanarak incelemektir. Sonlu eleman çözümlerinde ANSYS'in üç boyutlu katı eleman (SOLID186) ve global yapıda bir boyutlu kiriş eleman (BEAM188) [33] kullanılmıştır. Parametrik çalışmada, düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki eksenel FD eliptik kirişin statik analiz davranışı farklı sınır koşulları, merkez açı değerleri, yarıçap oranları ve farklı malzeme dağılım oranları için mesnet tepkileri ve en büyük yer değiştirme değerleri üzerinden detaylı olarak incelenerek özgün örnekler literatüre sunulmuştur.

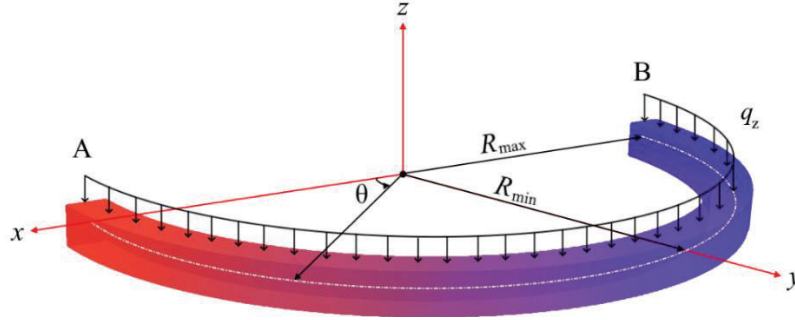
FORMÜLASYON

Bu bölümde sırasıyla eliptik kirişin geometrisi, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme modeli ve statik analizinde kullanılan ANSYS sonlu eleman programında tanımlı elemanlara ait açıklamalara yer verilmiştir.

Elipitik Kiriş Geometrisi: Kartezyen koordinat sisteminde tanımlı x - y düzleminde bulunan düzlem eğrisel kirişe ait konum vektörü ifadesini x ekseninden itibaren ölçülen θ açısı parametre olarak seçilerek,

$$\mathbf{r}(\theta) = \{x(\theta), y(\theta)\} \quad (1)$$

yazılır.



Şekil 1. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kiriş.

Elipitik kirişin (Şekil 1) x - y düzlemindeki bileşenleri,

$$x(\theta) = R_{\max} \cos \theta, \quad y(\theta) = R_{\min} \sin \theta \quad (2)$$

olmak üzere, burada $R_{\min} > 0$ ve $R_{\max} > 0$ sırasıyla minimum ve maksimum yarıçap değerlerini göstermektedir. Elipitik kirişin yay boyu s nin gradyenti olan $c(\theta)$ (1) deki konum vektörü üstünden tanımlanırsa,

$$c(\theta) = \|\mathbf{r}_{,\theta}\|, \quad ds = c(\theta) d\theta \quad (3)$$

dir. Burada virgülden sonraki alt indis ifadesi θ parametresine göre türevi göstermektedir [34]. (3) de verilen yay boyu gradyenti $c(\theta)$ yardımıyla kirişin toplam uzunluğu

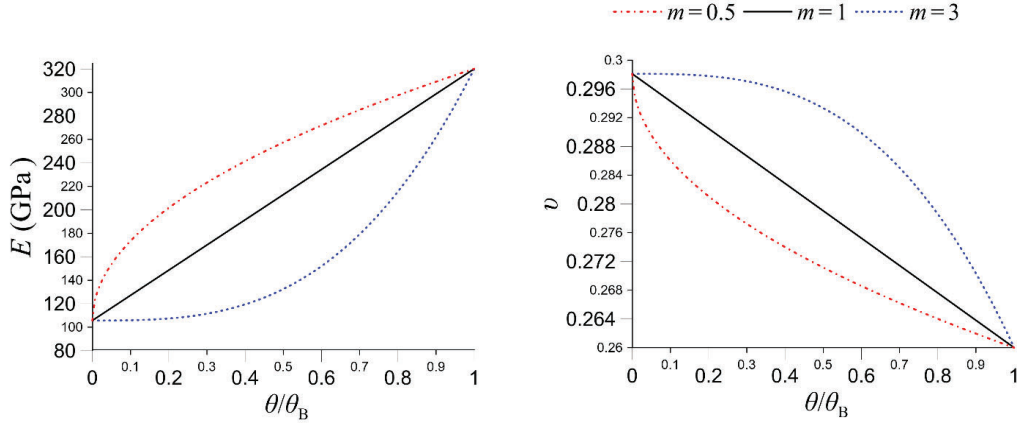
$S = \int_0^{\theta_B} c(\theta) d\theta$ formülü ile bulunur. θ_B eliptik kirişin merkez açısını göstermektedir (Şekil 1).

Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş (EFD) Malzeme Modeli: İki fazlı malzemeden oluşan kompozit kirişte malzeme dağılımı eğrisel kirişin yatay açı θ parametresine bağlı olarak kiriş eksen boyu boyunca fonksiyonel olarak değişmektedir. Kompozit malzemenin etkin malzeme özellikleri karışım kuralına (Voigt model) [35] göre,

$$\begin{aligned} E(\theta) &= E_A + (E_B - E_A) \left(\frac{\theta}{\theta_B} \right)^m \\ \nu(\theta) &= \nu_A + (\nu_B - \nu_A) \left(\frac{\theta}{\theta_B} \right)^m \end{aligned} \quad (4)$$

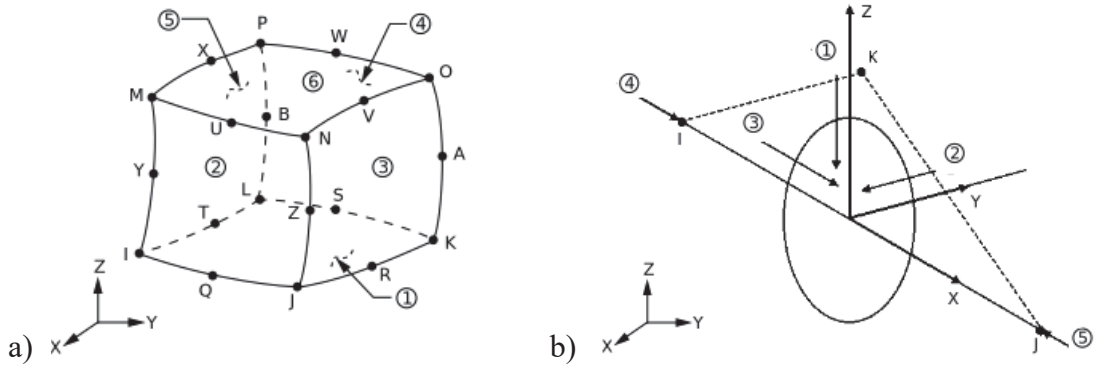
verilebilir. Burada, eğrisel kirişin θ 'ya göre etkin malzeme özellikleri ise sırasıyla elastisite modülü (E) ve Poisson oranı (ν) dır. $m \geq 0$ malzeme değişim parametresini göstermektedir. Bu çalışma kapsamında iki fazlı kompozit malzeme metal (Ti-6Al-4V) ve seramik (Al_2O_3) malzeme seçilmiştir. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede eğrisel kirişin başlangıç noktasından (A noktası) %100 metal malzeme ile başlarken, en son noktasında (B noktası) ise %100 seramik malzeme ile sonlanmaktadır. Malzeme değişim parametresi $m = 0$ için tüm çubuk izotrop homojen seramik malzemeden oluşurken, $m = \infty$ değeri için ise tüm çubuk izotrop homojen metal malzemeden oluşmaktadır. Metal (Ti-6Al-4V) malzemesine ait

malzeme özellikleri $E_A = 105.7 \text{ GPa}$, $\nu_A = 0.2981$ 'dir. Seramik (Al_2O_3) malzemesine ait malzeme özellikleri ise $E_B = 320.24 \text{ GPa}$, $\nu_B = 0.26$ 'dır. Metal ve seramik malzemelerine ait mekanik malzeme özellikleri (4) numaralı denklemde yerleştirilirse çubuk eksen boyunda etkin malzeme özellikleri elde edilir (Şekil 2).



Şekil 2. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eğrisel kirişin etkin malzeme değerlerinin normalize edilmiş yatay açı parametresine (θ / θ_B) göre değişimi

Sonlu Eleman Yöntemi: Bu çalışma, bilgisayar tabanlı sonlu eleman programı olan ANSYS [33] kullanılarak eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) eliptik kirişin statik davranışı incelenmiştir. Kiriş elemanın modellenmesinde kullanılan ANSYS'in sonlu eleman modelleri ise;



Şekil 3. ANSYS sonlu eleman programı a) SOLID186 üç boyutlu (3B) 20 adet düğüm noktasına sahip katı eleman (ilgili şekil [33]'den alınmıştır.) ve b) BEAM188 serbestlik derecesi üç boyutlu (3B) uzayda tanımlanmış 2 adet düğüm noktasına sahip bir boyutlu kiriş eleman (ilgili şekil [33]'den alınmıştır.)

ANSYS SOLID186: Yüksek mertebeden üç boyutlu (3B) ve 20 düğüm noktasına sahip ikinci dereceden yer değiştirme davranışı gösteren katı elemandır (Şekil 3.a). Her bir düğüm noktasında 3 adet serbestlik derecesi bulunur: x, y ve z doğrultularında ötelenmelerdir [33].

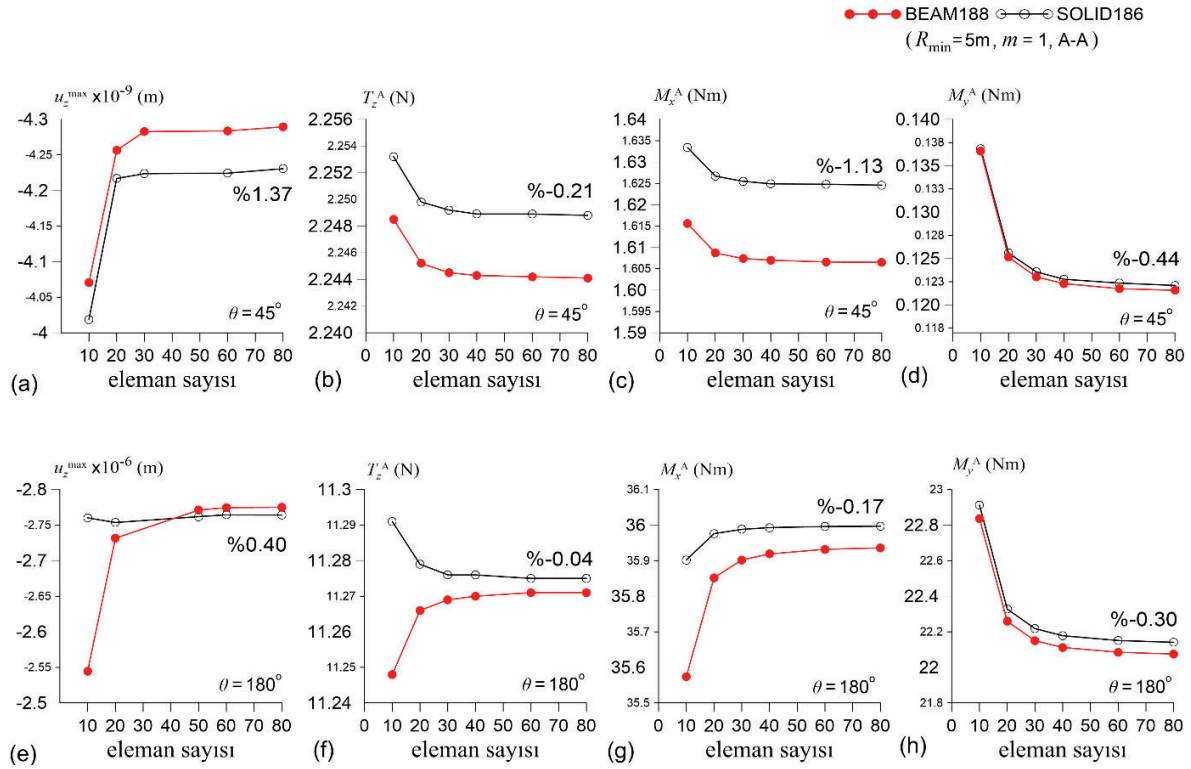
ANSYS BEAM188: İnce ve orta derecede yükseklik/uzunluk oranı bulunan kiriş yapılarını analiz etmek amacıyla kullanılır. Timoshenko kiriş teorisi üzerinden kayma deformasyonu etkilerini de hesaba katarak formüle edilmiştir. Serbestlik derecesi üç boyutlu (3B) uzayda tanımlanmış 2 adet düğüm noktasına sahip kiriş eleman (Şekil 3.b) her bir düğüm noktasında 6 adet serbestlik derecesi bulunur: Bunlardan üçü x, y ve z doğrultularında ötelenmeler olup, diğer üçü ise x, y ve z eksenleri etrafında kesit dönmeleridir [33].

SAYISAL SONUÇLAR

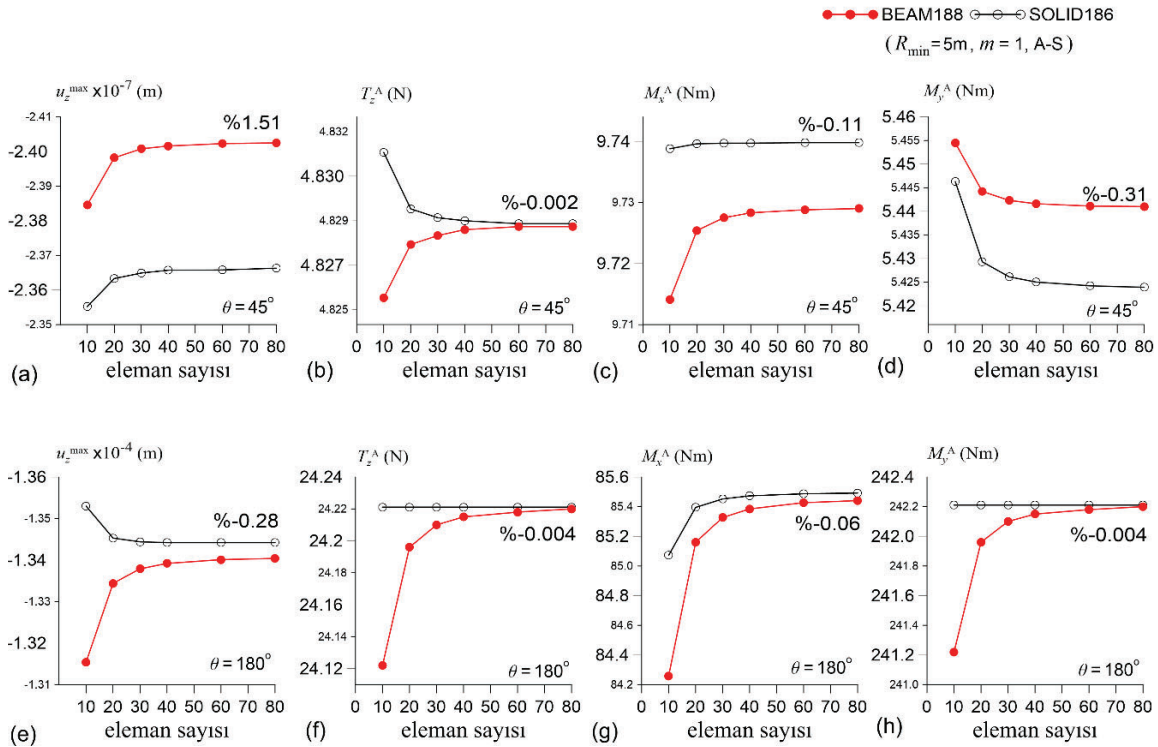
Sayısal örnekler, farklı malzeme değişim parametreleri ($m = 0, 0.5, 1, 3$ ve ∞), farklı merkez açı değerleri ($\theta_B = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ ve 180°) ve farklı minimum yarıçap değerleri ($R_{\min} = 10\text{m}, 7.5\text{m}$ ve 5m) için ankastre-ankastre ya da ankastre-serbest sınır şartına sahip, dikdörtgen kesitli aksenal fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) eliptik kirişin düzgün yayılı yük ($q_z = 1\text{N/m}$) etkisindeki statik analiz davranışı ANSYS programı ile incelenmiştir. Dikdörtgen kesitin genişliği 0.48m , yüksekliği ise 0.36m 'dir. Tüm örneklerde eliptik kirişin en büyük yarıçap değeri $R_{\max} = 10\text{m}$ 'dir. En küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 10\text{m}$ için dairesel düzlem çubuk elde edilmektedir. Sayısal sonuçlar, yakınsama analizi ve parametrik analiz olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. ANSYS çözümlerinde elemandaki malzeme özellikleri eğrisel kirişin iki düğüm noktasındaki malzeme özelliklerinin ortalaması olarak alınmıştır.

Yakınsama Analizi:

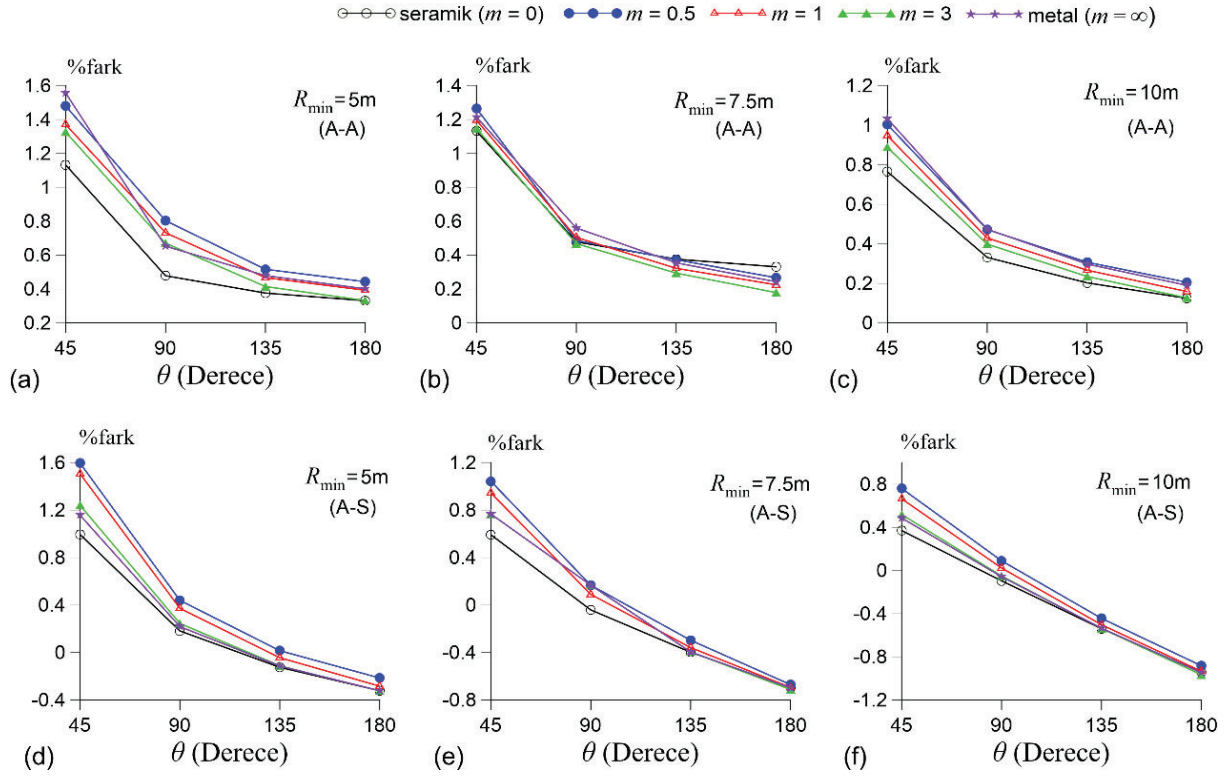
Yakınsama analizinde sonlu eleman çözümleri ANSYS'in SOLID186 ile BEAM188 elemanları üzerinden yapılmıştır. Eğrisel çubuklar sırasıyla 10 ile 80 adet arasında değişen doğru eksenli çubuk eleman üzerinden ayrıştırılmış olup en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ ve her iki sınır koşulu için A noktasındaki mesnet tepki kuvveti T_z^A ile mesnet momentleri M_x^A , $M^A = \sqrt{(M_x^A)^2 + (M_y^A)^2}$ ile ankastre-ankastre sınır koşulu için ise $M^B = \sqrt{(M_x^B)^2 + (M_y^B)^2}$ üzerinden yakınsama analizleri yapılmıştır. Toplam serbestlik derecesi ve analiz süresi ile ilgili örnek verilecek olursa: $\theta_B = 180^\circ$ ve $R_{\min} = 5\text{m}$ için elde edilen çubuk geometrisinin 80 adet doğru eksenli çubuk eleman üzerinden tanımlanan SOLID186 ve BEAM188 elemanlarının toplam serbestlik dereceleri sırasıyla 307791 (katı eleman boyu 0.006m) ve 5766'dır. Ayrıca, $m = 1$ ve ankastre-ankastre sınır koşulu için analiz süreleri incelendiğinde SOLID186 ve BEAM188 elemanları için sırasıyla 13.547 sn ve 1.203 sn (Intel® Core™ i5-7200U CPU, 2.40 GHz, 8GB RAM) olduğu gözlemlenmiştir. Ele alınan tüm örneklerde, 60 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıştırılan eğri eksenli çubuğun elde edilen sonuçları ($u_z^{\max}$, T_z^A , M_x^A , M^A , M^B) ve 80 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıştırılan eğri eksenli çubuğun sonuçlarına ($u_z^{\max}$, T_z^A , M_x^A , M^A , M^B) göre ANSYS'in her bir elemanı BEAM188 ve SOLID186 için ayrı ayrı normalize edilmiştir. $u_z^{\max}$, T_z^A , M_x^A , M^A ve M^B değerleri göz önüne alındığında yüzde farkların mutlak değerce en büyük değerleri SOLID186 ve BEAM188 için sırasıyla %0.09 ve %0.58 dir. $R_{\min} = 5\text{m}$, merkez açısı $\theta_B = 45^\circ$ ve malzeme gradyenti $m = 1$ olan EFD eliptik kirişin BEAM188 ve SOLID186 elemanlarının performansları statik analiz sonuçları ($u_z^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A) üzerinden ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır koşulları için sırasıyla Şekil 4 ve 5'te sunulmuştur. Ayrıca, 80 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıştırılan eğri eksenli çubukların BEAM188 eleman üzerinden elde edilen sonuçları SOLID186 eleman üzerinden elde edilen sonuçlarına göre normalize edilerek hesaplanan yüzde farklar Şekil 4 ve 5'te sunulmuştur. Yukarıda bahsi geçen tüm parametreler için en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ değerleri için SOLID186 ve BEAM188 sonuçları arasındaki yüzde farklar Şekil 6'da verilmiştir. Mesnet tepkisi T_z^A , M_x^A , M^A ve M^B değerleri göz önüne alındığında bu yüzde farkların mutlak değerce en büyük değerleri SOLID186 ve BEAM188 için sırasıyla %0.25, %1.21, %1.22 ve %0.08 dir.



Şekil 4. EFD eliptik kirişin en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ ve A noktasındaki mesnet tepkileri M_x^A , M_y^A ve T_z^A için yakınsama analizi ankastre-ankastre (A-A) sınır koşulu



Şekil 5. EFD eliptik kirişin en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ ve A noktasındaki mesnet tepkileri M_x^A , M_y^A ve T_z^A için yakınsama analizi ankastre-serbest (A-S) sınır koşulu



Şekil 6. Eğrisel kirişin en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ değerinin farklı sınır şartları ve parametre ($R_{\min}$, m ve θ_B) değerleri için ANSYS'in SOLID186 ve BEAM188 eleman sonuçlarının

$$\text{kıyaslanması } \% \text{fark} = \left[1 - \left(u_z^{\max} \right)_{\text{BEAM188}} / \left(u_z^{\max} \right)_{\text{SOLID186}} \right] \times 100.$$

Parametrik Analiz:

Malzeme gradyenti parametresinin ($m = 0, 0.5, 1, 3$ ve $m = \infty$) değişimi, farklı sınır koşulları (ankastre-ankastre ve ankastre-serbest), farklı minimum yarıçap değerleri ($R_{\min} = 10m, 7.5m$ ve $5m$) ile farklı merkezi açı değerleri ($\theta_B = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ ve 180°) üzerinden statik analiz sonuçları ($u_z^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A) incelenmiştir. Yukarıda bahsi geçen sınır koşulları ve parametrelere ($R_{\min}$, θ_B) göre malzeme gradyenti parametresi $m = \infty$ a göre elde edilen yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ ve A noktasındaki mesnet tepkileri M_x^A , M_y^A ve T_z^A sonuçlar sırasıyla Çizelge 1, 2, 3 ve 4'te sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa:

Malzeme gradyenti parametresi (m): Malzeme değişimi parametre değerleri $m = 0, 0.5, 1$ ve 3 sahip eğrisel kirişlerin statik analiz sonuçları ($u_z^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A) malzeme değişim parametre değeri $m = \infty$ olan eğrisel kirişin sonuçlarına göre $\beta_m^f = f_{m=i} / f_{m=\infty}$ ($i = 0, 0.5, 1$ ve 3 ; $f = u_z^{\max}, T_z^A, M_x^A$ ve M_y^A) formülü üzerinden her bir sınır koşulu, merkezi açı (θ_B) değeri ve en küçük yarıçap ($R_{\min}$) değerleri için normalize edilmiştir. $u_z^{\max}, T_z^A, M_x^A$ ve M_y^A sonuçları için hesaplanan bu oranlar sırasıyla Şekil 7-10'da verilmiştir.

Çizelge 1. Düzgün yayılı yük etkisindeki metal (Ti-6Al-4V) malzemeden oluşan eğrisel kirişin en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ (m) değerleri. ($m = \infty$)

θ_B	Ankastre-Ankastre (A-A)			Ankastre-Serbest (A-S)		
	$R_{\min} = 5m$	$R_{\min} = 7.5m$	$R_{\min} = 10m$	$R_{\min} = 5m$	$R_{\min} = 7.5m$	$R_{\min} = 10m$
45°	-8.11×10^{-9}	-2.25×10^{-8}	-5.34×10^{-8}	-3.33×10^{-7}	-9.58×10^{-7}	-2.35×10^{-6}
90°	-3.09×10^{-7}	-5.56×10^{-7}	-9.48×10^{-7}	-1.33×10^{-5}	-2.16×10^{-5}	-3.51×10^{-5}
135°	-2.06×10^{-6}	-3.37×10^{-6}	-5.53×10^{-6}	-8.61×10^{-5}	-1.16×10^{-4}	-1.56×10^{-4}
180°	-5.21×10^{-6}	-1.03×10^{-5}	-2.00×10^{-5}	-1.90×10^{-4}	-2.80×10^{-4}	-4.00×10^{-4}

Çizelge 2. Düzgün yayılı yük etkisindeki metal (Ti-6Al-4V) malzemeden oluşan eğrisel kirişin A noktasındaki kuvveti T_z^A (N) değerleri. ($m = \infty$)

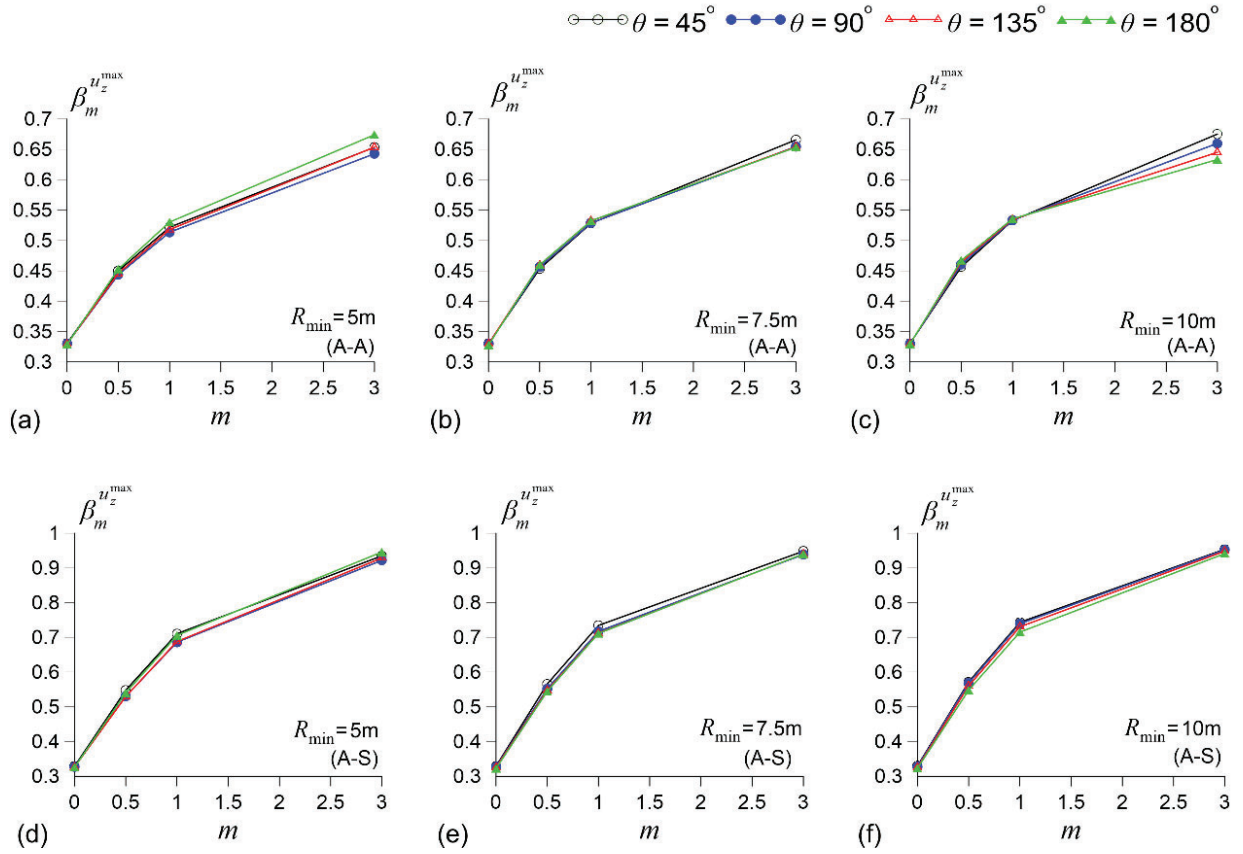
θ_B	Ankastre-Ankastre (A-A)			Ankastre-Serbest (A-S)		
	$R_{\min} = 5m$	$R_{\min} = 7.5m$	$R_{\min} = 10m$	$R_{\min} = 5m$	$R_{\min} = 7.5m$	$R_{\min} = 10m$
45°	2.245	3.146	3.927	4.828	6.285	7.854
90°	6.101	6.943	7.854	12.111	13.815	15.708
135°	9.755	10.743	11.781	19.392	21.345	23.562
180°	12.111	13.815	15.708	24.221	27.629	31.416

Çizelge 3. Düzgün yayılı yük etkisindeki metal (Ti-6Al-4V) malzemeden oluşan eğrisel kirişin A noktasındaki momenti M_x^A (Nm) değerleri. ($m = \infty$)

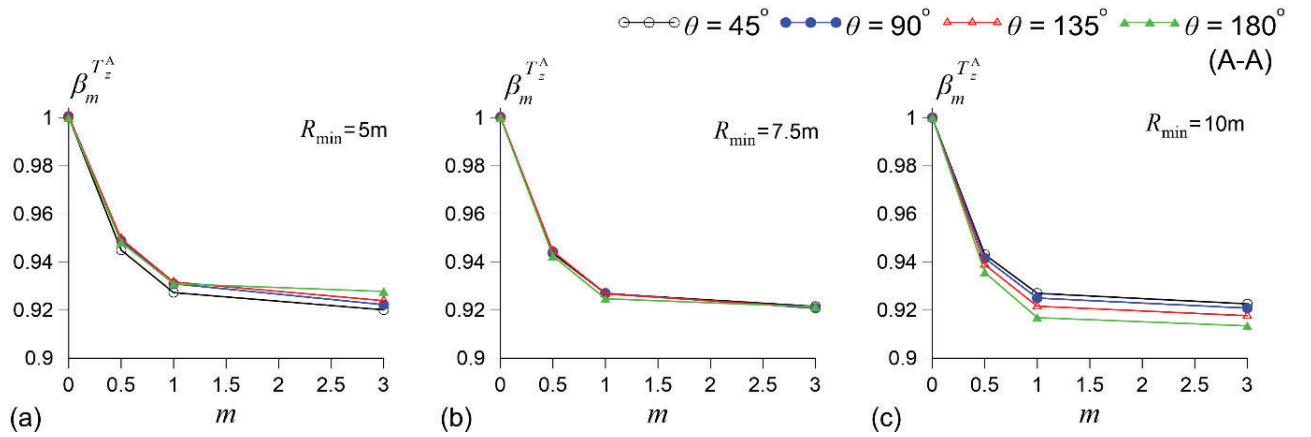
θ_B	Ankastre-Ankastre (A-A)			Ankastre-Serbest (A-S)		
	$R_{\min} = 5m$	$R_{\min} = 7.5m$	$R_{\min} = 10m$	$R_{\min} = 5m$	$R_{\min} = 7.5m$	$R_{\min} = 10m$
45°	2.064	3.453	5.313	9.740	18.077	29.295
90°	12.151	17.436	22.775	42.748	69.118	100.020
135°	28.458	41.715	54.744	75.753	120.150	170.730
180°	42.746	69.112	100.010	85.492	138.220	200.010

Çizelge 4. Düzgün yayılı yük etkisindeki metal (Ti-6Al-4V) malzemeden oluşan eğrisel kirişin A noktasındaki momenti M_y^A (Nm) değerleri. ($m = \infty$)

θ_B	Ankastre-Ankastre (A-A)			Ankastre-Serbest (A-S)		
	$R_{\min} = 5m$	$R_{\min} = 7.5m$	$R_{\min} = 10m$	$R_{\min} = 5m$	$R_{\min} = 7.5m$	$R_{\min} = 10m$
45°	0.240	0.116	0.042	5.424	6.536	7.816
90°	4.711	2.844	1.299	52.081	54.311	57.064
135°	17.032	12.791	8.523	151.080	157.150	164.900
180°	30.333	29.697	29.812	242.210	276.290	314.160

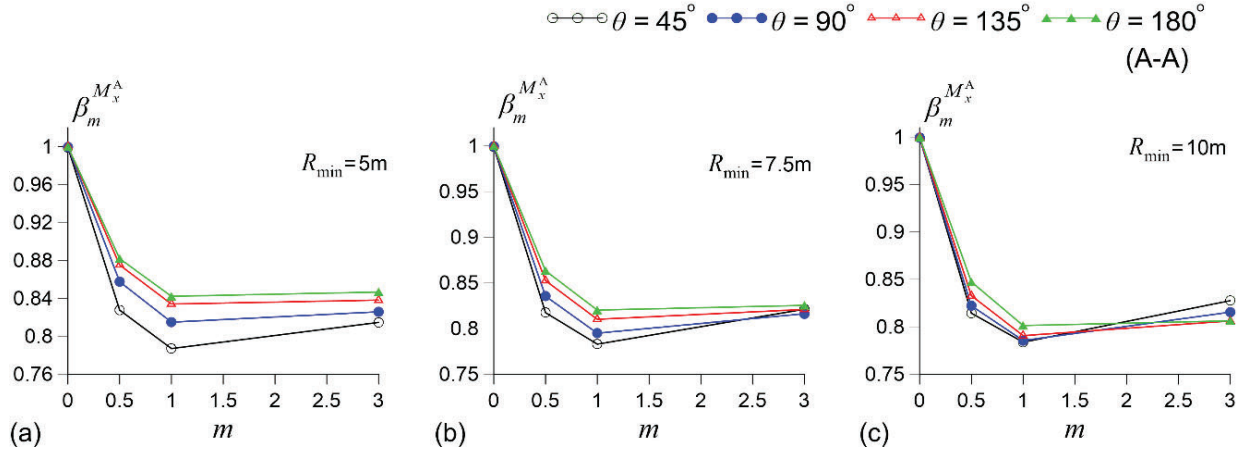


Şekil 7. Malzeme gradyenti m parametresinin en büyük yer değiştirme $u_z^{\max}$ üzerindeki etkisi. $\beta_m^{u_z^{\max}} = (u_z^{\max})_{m=i} / (u_z^{\max})_{m=\infty}$ ($i = 0, 0.5, 1$ ve 3)

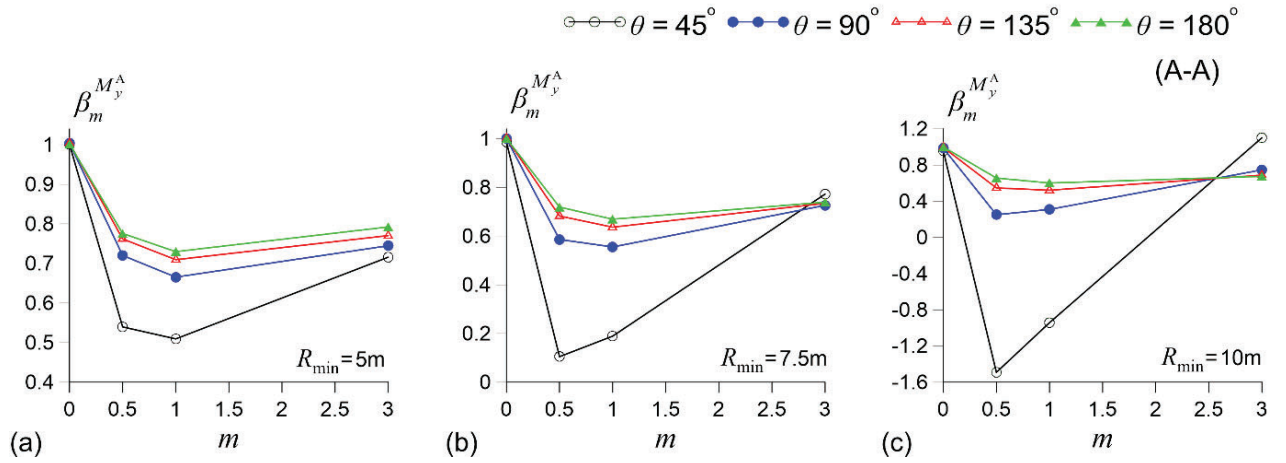


Şekil 8. Malzeme gradyenti m parametresinin A noktasındaki kuvvet T_z^A üzerindeki etkisi.

$$\beta_m^{T_z^A} = (T_z^A)_{m=i} / (T_z^A)_{m=\infty} \quad (i = 0, 0.5, 1 \text{ ve } 3)$$

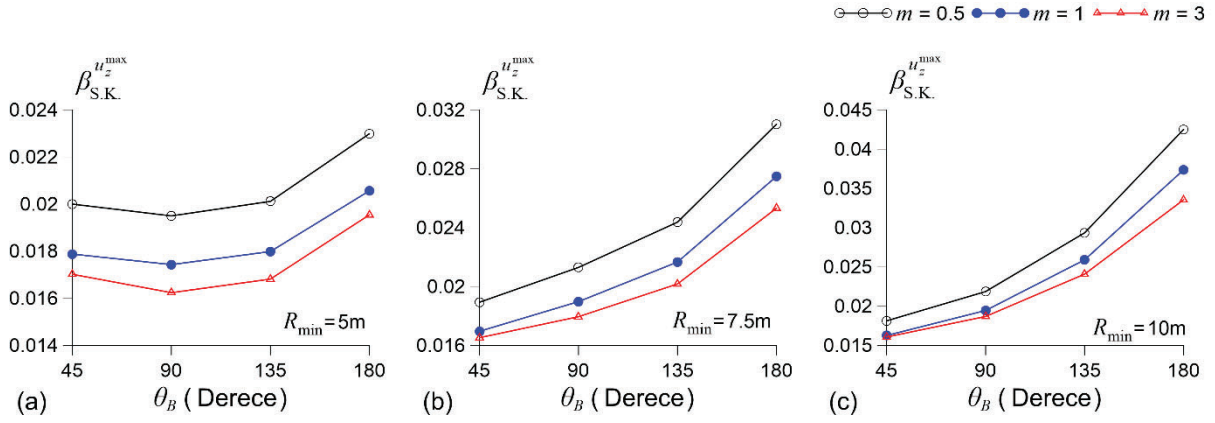
Şekil 9. Malzeme gradyenti m parametresinin A noktasındaki moment M_x^A üzerindeki etkisi.

$$\beta_m^{M_x^A} = (M_x^A)_{m=i} / (M_x^A)_{m=\infty} \quad (i = 0, 0.5, 1 \text{ ve } 3)$$

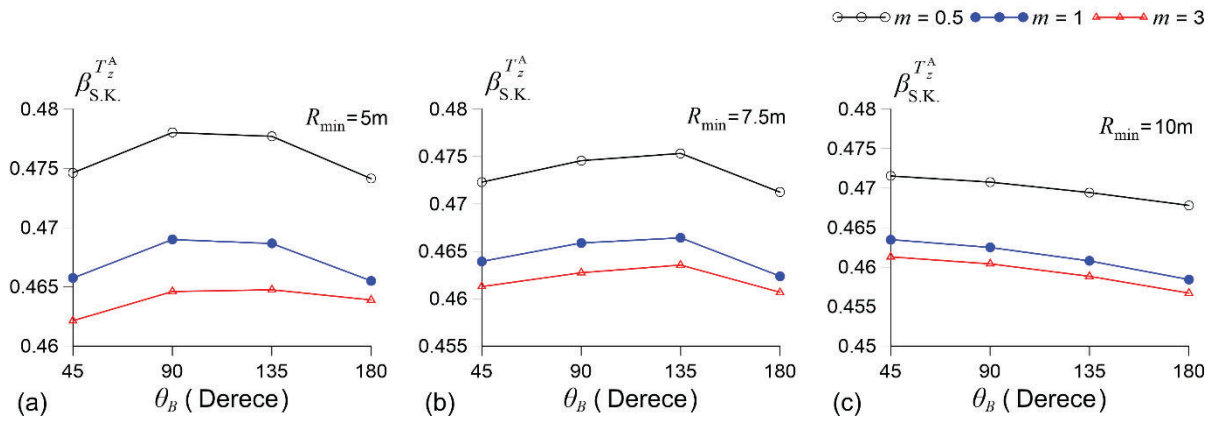
Şekil 10. Malzeme gradyenti m parametresinin A noktasındaki moment M_y^A üzerindeki etkisi.

$$\beta_m^{M_y^A} = (M_y^A)_{m=i} / (M_y^A)_{m=\infty} \quad (i = 0, 0.5, 1 \text{ ve } 3)$$

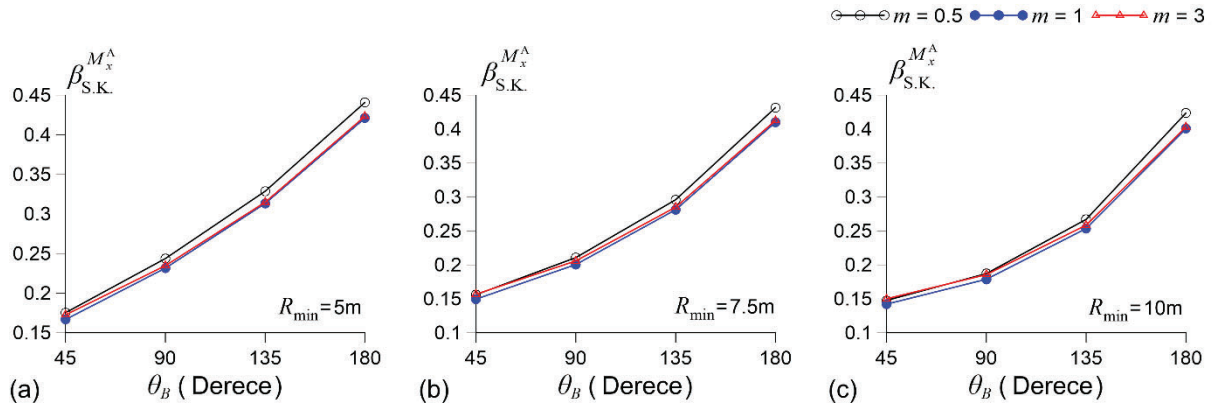
Sınır Şartı: Sınır koşulunun etkisi ankastre-ankastre (A-A) olan eliptik kirişin birinci doğal frekans değeri ankastre-serbest (A-S) olan eliptik kirişin sonuçlarına göre her bir merkezi açı (θ) ve en küçük yarıçap ($R_{\min}$) değerleri ile malzeme değişim parametreleri $m = 0.5, 1$ ve 3 için $\beta_{S.K.}^f = f_{A-A} / f_{A-S}$ ($f = u_z^{\max}, T_z^A, M_x^A$ ve M_y^A) formülü üzerinden normalize edilerek ilgili oranlar $u_z^{\max}, T_z^A, M_x^A$ ve M_y^A sonuçları için sırasıyla Şekil 11-14’de verilmiştir.



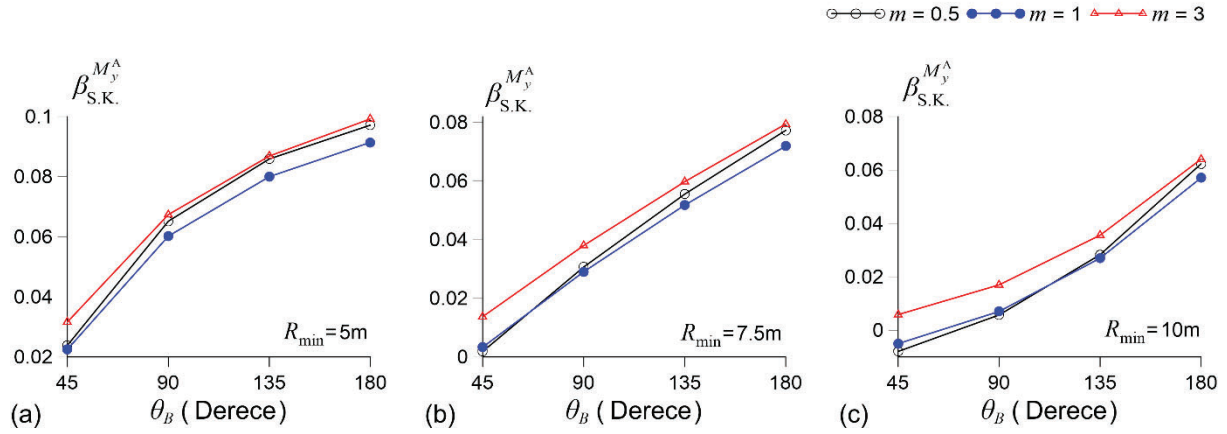
Şekil 11. Sınır koşulunun EFD kirişin $u_z^{\max}$ değerine etkisi. $\beta_{S.K.}^{u_z^{\max}} = (u_z^{\max})_{A-A} / (u_z^{\max})_{A-S}$.



Şekil 12. Sınır koşulunun EFD kirişin T_z^A değerine etkisi. $\beta_{S.K.}^{T_z^A} = (T_z^A)_{A-A} / (T_z^A)_{A-S}$.



Şekil 13. Sınır koşulunun EFD kirişin M_x^A değerine etkisi. $\beta_{S.K.}^{M_x^A} = (M_x^A)_{A-A} / (M_x^A)_{A-S}$.



Şekil 14. Sınır koşulunun EFD kirişin M_y^A değerine etkisi. $\beta_{S.K.}^{M_y^A} = (M_y^A)_{A-A} / (M_y^A)_{A-S}$.

SONUÇLAR

Düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş düzlem eliptik kirişlerin statik analiz davranışı en büyük yer değiştirme değerleri ve mesnet tepkileri üzerinden parametrik bir çalışma ile sonlu eleman yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu parametrik çalışmada, farklı sınır koşulları, malzeme değişim parametreleri, minimum yarıçap oranı ve merkezi açı değerleri ele alınmıştır. Analizler, bilgisayar tabanlı sonlu eleman programı olan ANSYS'in, üç boyutlu katı elemanı (SOLID186) ve bir boyutlu kiriş elemanı (BEAM188) kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma kapsamında seçilen parametrelere göre analiz sonuçları özetlenecek olursa:

- Malzeme gradyenti parametresi (m) etkisi: $m = 0, 0.5, 1$ ve 3 parametreleri göz önüne alındığında:
 - Minimum yarıçap oranları ($R_{min} = 10m, 7.5m$ ve $5m$) ve her iki sınır koşulu için, en büyük yer değiştirme u_z^{max} (Şekil 7) ait β_m malzeme gradyenti parametresi (m) değeri arttıkça artmaktadır. β_m oranı farklı sınır koşulları için irdelenecek olursa:
 - Ankastre-ankastre (A-A) sınır koşuluna ait $\beta_m^{u_z^{max}}$ oranı (Şekil 7a-c), en büyük değeri olan 0.6752 'yi $m = 3$, $\theta_B = 45^\circ$ ve $R_{min} = 10m$ durumu için alırken, en küçük değeri olan 0.3278 'yi ise $m = 0$, $\theta_B = 180^\circ$ ve $R_{min} = 7.5m$ durumunda almaktadır.
 - Ankastre-serbest (A-S) sınır koşuluna ait $\beta_m^{u_z^{max}}$ oranı (Şekil 7d-f), en büyük değeri olan 0.9537 'yi $m = 3$, $\theta_B = 45^\circ$ ve $R_{min} = 10m$ durumu için alırken, en küçük değeri 0.3223 olup $m = 0$, $\theta_B = 180^\circ$ ve $R_{min} = 7.5m$ durumu için almaktadır.
 - Ankastre-ankastre sınır koşulu için, A noktasındaki T_z^A kuvvetine ait β_m oranı (Şekil 8), seçilen her bir minimum yarıçap oranı ($R_{min} = 10m, 7.5m$ ve $5m$) ve merkez açı ($\theta_B = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ ve 180°) değeri için malzeme gradyenti parametresi m arttıkça azalmaktadır.
- Sınır şartı etkisi: $m = 0.5, 1$ ve 3 parametreleri göz önüne alındığında:
 - En büyük yer değiştirmeye u_z^{max} ait $\beta_{S.K.}$ oranı (Şekil 11), minimum yarıçap oranları ($R_{min} = 10m$ ve $7.5m$) için merkez açı (θ_B) değeri arttıkça artmaktadır.

- A noktasındaki kuvvete T_z^A ait $\beta_{S.K.}$ oranı (Şekil 12), minimum yarıçap oranı $R_{\min} = 10m$ için, merkez açı değeri (θ_B) arttıkça azalmaktadır.
- A noktasındaki momentlere M_x^A (Şekil 13) ve M_y^A (Şekil 14) ait $\beta_{S.K.}$ oranları seçilen her bir minimum yarıçap oranı ($R_{\min} = 10m, 7.5m$ ve $5m$) için merkez açı (θ_B) değeri arttıkça artmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] E. S. Chin, Army focused research team on functionally graded armor composites, *Materials Science and Engineering: A*. 259(2) (1999) 155-161. doi:10.1016/S0921-5093(98)00883-1.
- [2] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber & K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications, *Materials Science and Engineering: A*. 362(1-2) (2003) 40-60. doi:10.1016/S0921-5093(03)00580-X.
- [3] S. Kumar, K. M. Reddy, A. Kumar, & G. R. Devi, Development and characterization of polymer–ceramic continuous fiber reinforced functionally graded composites for aerospace application, *Aerospace Science and Technology*. 26(1) (2013) 185-191. doi: 10.1016/j.ast.2012.04.002.
- [4] Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki & R. G. Ford, *Functionally graded materials: design, processing and applications* (Vol. 5). Springer Science & Business Media. 2013.
- [5] C. Zhang, F. Chen, Z. Huang, M. Jia, G. Chen, Y. Ye, Y. Lin, W. Liu, B. Chen, Q. Shen L. Zhang, E. J. Lavernia, Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Materials Science and Engineering: A*. 764 (2019) 138209. doi: 10.1016/j.msea.2019.138209.
- [6] K.M. Liew, Z. Pan, L.W. Zhang, The recent progress of functionally graded CNT reinforced composites and structures. *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 63 (2020) 234601. doi:10.1007/s11433-019-1457-2.
- [7] A. Kaw, *Mechanic of Composite Materials* (Second Edition). Taylor & Francis Group, LLC. 2006.
- [8] E. S. Chin, Army focused research team on functionally graded armor composites, *Materials Science and Engineering: A*. 259(2) (1999) 155-161. doi:10.1016/S0921-5093(98)00883-1.
- [9] C. M. R. Dias, H. Savastano Jr. & V. M. John Exploring the potential of functionally graded materials concept for the development of fiber cement. *Construction and Building Materials*. 24(2) (2010) 140-146. doi:10.1016/j.conbuildmat.2008.01.017.
- [10] G. Mathiyazhagan, N. Vasiraja, Finite element analysis on curved beams of various sections: *International Conference on Energy Efficient Technologies for Sustainability*, Nagercoil, India 2013: s.168-173. doi:10.1109/ICEETS.2013.6533377.
- [11] C. H. Norris, J. B. Wilbur, Ş. Utku, *Elementary structural analysis*. McGraw-HILL. 1977.
- [12] P. Chidamparam, & A. W. Leissa, Vibrations of planar curved beams, rings, and arches. *ASME. Appl. Mech. Rev.* 46(9) (1993) 467-483. doi:10.1115/1.3120374.

- [13] G. Prathap, The curved beam/deep arch/finite ring element revisited. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 21(3) (1985) 389-407. doi:10.1002/nme.1620210302.
- [14] B. Kang, C.H. Riedel, C.A. Tan, Free vibration analysis of planar curved beams by wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*. 260(1) (2003) 19-44. doi:10.1016/S0022-460X(02)00898-2.
- [15] A. Cazzani, M. Malagù & E. Turco, Isogeometric analysis of plane-curved beams. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 21(5) (2016) 562-577. doi:10.1177/1081286514531265.
- [16] M. Şimşek, T. Kocatürk & Ş. D. Akbaş, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Composite Structures*. 94(8) (2012) 2358-2364. doi:10.1016/j.compstruct.2012.03.020.
- [17] E. Babilio, Dynamics of an axially functionally graded beam under axial load. *The European Physical Journal Special Topics*. 222(7) (2013) 1519-1539. doi:10.1140/epjst/e2013-01942-8.
- [18] N. Shafiei, M. Kazemi & M. Ghadiri, Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams. *International Journal of Engineering Science*. 102 (2016) 12-26. doi:10.1016/j.ijengsci.2016.02.007.
- [19] M. Azimi, S. S. Mirjavadi, N. Shafiei & A. M. S. Hamouda, Thermo-mechanical vibration of rotating axially functionally graded nonlocal Timoshenko beam. *Applied Physics A*. 123(1) (2017) 104. doi:10.1007/s00339-016-0712-5.
- [20] M. H. Ghayesh, Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded shear-deformable tapered beams. *Applied Mathematical Modelling*. 59 (2018) 583-596. doi:10.1016/j.apm.2018.02.017.
- [21] S. Zheng, D. Chen & H. Wang, Size dependent nonlinear free vibration of axially functionally graded tapered microbeams using finite element method. *Thin-Walled Structures*. 139 (2019) 46-52. doi:10.1016/j.tws.2019.02.033.
- [22] M. Ermis, U. N. Aribas, A. Kutlu, N. Eratlı, & M. H. Omurtag, Forced vibration analysis of axially FG straight beams by mixed FEM: *IV. Eurasian Conference on Civil and Environmental Engineering*, İstanbul, Türkiye, 2019: s. 894-899.
- [23] U. N. Aribas, M. Ermis, A. Kutlu, N. Eratlı & M. H. Omurtag, Elastically Damped Transient Response of Axially FG Straight Beams: *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 4, Rome, Italy 2019: s.19-25.
- [24] A. Ebrahimi-Mamaghani, H. Sarparast, M. Rezaei, On the vibrations of axially graded Rayleigh beams under a moving load. *Applied Mathematical Modelling*. 84 (2020) 554-570. doi: 10.1016/j.apm.2020.04.002.
- [25] S. Rajasekaran, Analysis of curved beams using a new differential transformation based curved beam element. *Meccanica* 49(4) (2014) 863-886. doi:10.1007/s11012-013-9835-3
- [26] G. C. Tsiatas, & A. E. Charalampakis, Optimizing the natural frequencies of axially functionally graded beams and arches. *Composite Structures*. 160 (2017) 256-266. doi:10.1016/j.compstruct.2016.10.057.
- [27] A. R. Noori, T. A. Aslan, & B. Temel, An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section. *Composite Structures*. 200 (2018) 701-710. doi:10.1016/j.compstruct.2018.05.077.

- [28] B. Temel, & A. R. Noori, Out-of-plane vibrations of shear-deformable AFG cycloidal beams with variable cross section. *Applied Acoustics*. 155 (2019) 84-96. doi:10.1016/j.apacoust.2019.05.010.
- [29] J. K. Lee, & B. K. Lee, In-plane free vibration of uniform circular arches made of axially functionally graded materials. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 19(08) (2019) 1950084. doi:10.1142/S0219455419500846.
- [30] A. Shahba, R. Attarnejad, S. Hajilar, A mechanical-based solution for axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 20(8) (2013) 696-707. doi:10.1080/15376494.2011.640971.
- [31] S. Li, J. Hu, C. Zhai, L. Xie, A unified method for modeling of axially and/or transversally functionally graded beams with variable cross-section profile. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 41(2) (2013) 168-188. doi:10.1080/15397734.2012.709466.
- [32] S. Rajesakaran, Analysis of curved beams using a new differential transformation based curved beam element. *Meccanica*. 49(4) (2014) 863-886. doi:10.1007/s11012-013-9835-3.
- [33] Ansys® Academic Research Mechanical, Mechanical APDL Release 2021 R1, Element Reference, ANSYS, Inc.
- [34] M. Ermis & M. H. Omurtag, Static and dynamic analysis of conical helices based on exact geometry via mixed FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*. 131 (2017) 296-304. doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.07.010.
- [35] B. Karami, D. Shahsavari, M. Janghorban & L. Li, Influence of homogenization schemes on vibration of functionally graded curved microbeams. *Composite Structures*. 216 (2019) 67-79. doi:10.1016/j.compstruct.2019.02.089.